

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИВОРОСТРОЕНИЯ**

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Неопределенный интеграл

**Методические указания
к выполнению индивидуальных заданий**

**Санкт-Петербург
2005**

Составители: *B. A. Вешев, C. B. Доброславский,
C. H. Розе, Ю. Н. Сирота*

Рецензент доктор физико-математических наук, профессор
B. П. Одинец

Приведены варианты индивидуальных заданий для рейтингового контроля знаний студентов университета по теме “неопределенный интеграл”. Кратко изложены основные теоретические сведения. Методы решения задач проиллюстрированы примерами. Разобрано решение типового варианта индивидуального задания.

Подготовлены кафедрой высшей математики и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.

© ГОУ ВПО
«Санкт-Петербургский
государственный университет
аэрокосмического приборостроения», 2005

Редактор *A. B. Семенчук*

Подписано к печати 11.04.05. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать
оффсетная. Усл. печ. л. 2,91. Уч.-изд. л. 2,38. Тираж 300 экз. Заказ №

Редакционно-издательский отдел
Отпечатано с авторского оригинал-макета
СПбГУАП
190000, Санкт-Петербург, ул. Б.Морская, 67

1. Основные понятия

Функция $F(x)$ называется *первообразной* по отношению к функции $f(x)$, если при любом x из общей области определения функций $F(x)$ и $f(x)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные для одной и той же функции $f(x)$, то $F_1(x) - F_2(x) = C$, где C – постоянная.

Совокупность всех первообразных, соответствующих функции $f(x)$, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x) dx$. Таким образом, если $F(x)$ – какая-либо первообразная для $f(x)$, то $\int f(x) dx = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

2. Таблица основных неопределенных интегралов

$$1. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1, \quad 1'. \int dx = x + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1, \quad 3'. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + C.$$

3. Методы интегрирования

3.1. Подведение под знак дифференциала

Этот способ интегрирования основан на определении и простейших свойствах дифференциала функции. В частности, имеют место следующие формулы:

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} \int f(ax) d(ax), \quad (1)$$

$$\int f(x+a) dx = \int f(x+a) d(x+a), \quad (2)$$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(\varphi(x)) d(\varphi(x)). \quad (3)$$

Используя (1)–(3) и таблицу неопределенных интегралов, легко получить соотношения:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{d(f(x))}{f(x)} = \ln |f(x)| + C, \quad (4)$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int \frac{d(f(x))}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C. \quad (5)$$

Пример 3.1

Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 9} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{(2x)^2 + 3^2} = \frac{1}{2 \cdot 3} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C.$$

Пример 3.2

Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{x^8 + 5}} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{4x^3 dx}{\sqrt{x^8 + 5}} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{\sqrt{(x^4)^2 + 5}} = \\ &= \frac{1}{4} \ln |x^4 + \sqrt{x^8 + 5}| + C. \end{aligned}$$

Пример 3.3

Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \arcsin x} = \int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x} = \ln |\arcsin x| + C.$$

С помощью метода подведения под знак дифференциала, выполняются задания 7 и 9 любого варианта индивидуальной работы.

3.2. Вычисление интегралов вида

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx \text{ и } \int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

Чтобы вычислить указанные интегралы, в числителе выделяют производную от квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, и представляют интеграл в виде суммы двух интегралов. Интеграл, содержащий в числителе производную от трехчлена, вычисляется по формуле (4) или (5). Во втором интеграле выделяется полный квадрат из квадратного трехчлена, и этот интеграл легко сводится к табличному.

Пример 3.4

Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{4x^2+12x+13} dx &= 3 \int \frac{x+\frac{2}{3}}{4x^2+12x+13} dx = \\ &= \frac{3}{8} \int \frac{(8x+12) + (\frac{16}{3}-12)}{4x^2+12x+13} dx = \\ &= \frac{3}{8} \int \frac{8x+12}{4x^2+12x+13} dx - \frac{5}{2 \cdot 2} \int \frac{d(2x+3)}{(2x+3)^2+2^2} = \\ &= \frac{3}{8} \ln |4x^2+6x+13| - \frac{5}{8} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{2} + C. \end{aligned}$$

Пример 3.5

Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{x+5}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{(2-2x)-10-2}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{2-2x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx + 6 \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-(x-1)^2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3+2x-x^2} + 6 \arcsin \frac{x-1}{2} + C. \end{aligned}$$

Этот прием используется для выполнения задания 4 индивидуальной работы.

3.3. Формула интегрирования по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции, тогда

$$\boxed{\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x)}$$

Этой формулой, как правило, пользуются в том случае, когда под интегралом стоит произведение двух функций, из которых одна “упрощается” при дифференцировании, а интеграл от второй функции может быть сведен к табличному.

Пример 3.6

Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int (2x - 3) \ln(x - 1) dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln(x - 1); \quad du = \frac{dx}{x - 1}; \\ dv = (2x - 3)dx; \quad v = x^2 - 3x; \end{array} \right| = \\ &= (x^2 - 3x) \ln(x - 1) - \int \frac{x^2 - 3x}{x - 1} dx = \\ &= (x^2 - 3x) \ln(x - 1) - \int \left(x - 2 - \frac{2}{x - 1} \right) dx = \\ &= (x^2 - 3x) \ln(x - 1) - \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln(x - 1) + C. \end{aligned}$$

Пример 3.7

Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{arctg}(2x) dx &= \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg}(2x); \quad du = \frac{2dx}{1 + 4x^2}; \\ dv = x dx; \quad v = \frac{x^2}{2}; \end{array} \right| = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(2x) - \int \frac{x^2}{1 + 4x^2} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(2x) - \\ &- \frac{1}{4} \int \frac{(4x^2 + 1) - 1}{1 + 4x^2} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1}{1 + 4x^2} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} \int \frac{d(2x)}{1 + (2x)^2} = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} \operatorname{arctg}(2x) + C. \end{aligned}$$

Методом интегрирования по частям выполняются задания 1 и 3 индивидуальной работы.

3.4. Интегрирование рациональных функций

Рациональной дробью или *рациональной функцией* от одной переменной называется выражение вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ многочлены с вещественными коэффициентами степени n и m соответственно. Рациональная дробь называется *правильной*, если $n < m$. Если $n \geq m$, то дробь называется *неправильной*. Если дробь неправильная, то поделив числитель на знаменатель (вообще говоря с остатком), ее можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Для интегрирования правильной рациональной дроби нужно сначала разложить знаменатель на множители вида $(x - x_i)^{\nu_i}$, где x_i – вещественные корни $Q_m(x)$ кратности ν_i , или $(x^2 + p_k x + q_k)^{\mu_k}$, которые отвечают парам комплексно сопряженных корней $a_k \pm ib_k$ (i – мнимая единица) кратности μ_k многочлена $Q_m(x)$. После этого, пользуясь методом неопределенных коэффициентов, нужно разложить дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ в сумму простейших дробей вида: $\frac{A}{(x - x_i)^k}$, ($k \geq 1$) и $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}$ ¹, а также $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}$, ($k > 1$), интегрирование которой сводится к последовательному понижению степени k с помощью рекуррентного соотношения (см. [1]–[4]).

Пример 3.8

Разложить на простейшие дроби $\frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$. Знаменатель этой дроби имеет вещественный корень второй кратности и пару комплексных корней первой кратности, отвечающих квадратному трехчлену $x^2 + 2x + 2$. Представим данную дробь в виде

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

¹Интегрирование таких дробей изложено в подразделе 3.2.

Если правую часть этого соотношения привести к общему знаменателю, то он совпадет со знаменателем левой части. Следовательно, необходимо подобрать неопределенные коэффициенты A , B , C , D так, чтобы числители были тождественно равны, т.е.

$$x + 1 \equiv A(x^2 + 2x + 2) + B(x - 1)(x^2 + 2x + 2) + (Cx + D)(x - 1)^2.$$

Подставим $x = 1$ в обе части этого тождества, получим $2 = 5A$, следовательно $A = 2/5$. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 0 = B + C, \\ x^2 & 0 = A + 2B - B + D - 2C, \\ x^1 & 1 = 2A + C + 2B - 2B - 2D, \\ x^0 & 1 = 2A - 2B + D. \end{array}$$

Решив эту систему любым способом, получим $B = -\frac{3}{25}$, $C = \frac{3}{25}$, $D = -\frac{1}{25}$. Таким образом,

$$\frac{x + 1}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{2}{5(x - 1)^2} - \frac{3}{25(x - 1)} + \frac{3x - 1}{25(x^2 + 2x + 2)}.$$

Используя полученный результат, вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 1}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx &= \int \frac{2}{5(x - 1)^2} dx - \int \frac{3}{25(x - 1)} dx + \\ &+ \int \frac{3x - 1}{25(x^2 + 2x + 2)} dx = -\frac{2}{5(x - 1)} - \frac{3}{25} \ln|x - 1| + \\ &+ \frac{3}{25 \cdot 2} \int \frac{(2x + 2) - \frac{2}{3} - 2}{x^2 + 2x + 2} dx = -\frac{2}{5(x - 1)} - \frac{3}{25} \ln|x - 1| + \\ &+ \frac{3}{50} \ln|x^2 + 2x + 2| - \frac{4}{25} \int \frac{d(x + 1)}{(x + 1)^2 + 1} = -\frac{2}{5(x - 1)} - \frac{3}{25} \ln|x - 1| + \\ &+ \frac{3}{50} \ln|x^2 + 2x + 2| - \frac{4}{25} \operatorname{arctg}(x + 1) + C. \end{aligned}$$

С помощью разложения рациональной дроби на простейшие выполняются задания 5 и 6 индивидуальной работы.

3.5. Интегрирование тригонометрических выражений

Любую рациональную функцию от $\sin x$ и $\cos x$ можно привести к рациональной дроби с помощью замены $\boxed{\tg \frac{x}{2} = t}$. Тогда $x = 2 \arctg t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. Эта замена называется *универсальной тригонометрической подстановкой*.

Пример 3.9

Вычислить интеграл

$$\int \frac{\cos x + 3 \sin x}{\cos x - 3 \sin x + 3} dx = \left| \begin{array}{l} \tg \frac{x}{2} = t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(1-t^2+6t)2 dt}{(1-t^2-6t+3+3t^2)(1+t^2)} = - \int \frac{t^2-6t-1}{(t^2-3t+2)(t^2+1)} dt.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби (пример 3.8)

$$\frac{t^2-6t-1}{(t-1)(t-2)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2} + \frac{Ct+D}{t^2+1};$$

$$t^2-6t-1 \equiv A(t-2)(t^2+1) + B(t-1)(t^2+1) + (Ct+D)(t-1)(t-2);$$

$$\begin{aligned} \text{при } t = 1 &\Rightarrow -6 = -2A && \Rightarrow A = 3, \\ \text{при } t = 2 &\Rightarrow -9 = 5B && \Rightarrow B = -9/5, \\ \text{при } t^3 &\Rightarrow 0 = A + B + C && \Rightarrow C = -6/5, \\ \text{при } t = 0 &\Rightarrow -1 = -2A - B + 2D && \Rightarrow D = 8/5. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned}
 -\int \frac{(t^2 - 6t - 1) dt}{(t^2 - 3t + 2)(t^2 + 1)} &= \int \frac{-3dt}{t-1} + \int \frac{9dt}{5(t-2)} + \int \frac{6t-8}{5(t^2+1)} dt = \\
 -3 \ln|t-1| + \frac{9}{5} \ln|t-2| + \frac{3}{5} \ln|t^2+1| - \frac{8}{5} \arctg t + C &= \left[t = \tg \frac{x}{2} \right] = \\
 -3 \ln \left| \tg \frac{x}{2} - 1 \right| + \frac{9}{5} \ln \left| \tg \frac{x}{2} - 2 \right| + \frac{3}{5} \ln \left| \tg^2 \frac{x}{2} + 1 \right| - \frac{8}{5} \arctg \left(\tg \frac{x}{2} \right) + C &= \\
 -3 \ln \left| \tg \frac{x}{2} - 1 \right| + \frac{9}{5} \ln \left| \tg \frac{x}{2} - 2 \right| - \frac{6}{5} \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| - \frac{4}{5}x + C.
 \end{aligned}$$

С помощью универсальной тригонометрической подстановки выполняются задания 8 и 10 индивидуальной работы.

3.6. Метод Остроградского

Этот метод применяется для вычисления интегралов вида $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n . Будем искасть этот интеграл в виде

$$\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (6)$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $(n-1)$ с неопределенными коэффициентами, т.е. $Q_{n-1}(x) = A_0x^{n-1} + A_1x^{n-2} + \dots + A_{n-1}$, а λ – неизвестное число. Для нахождения $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, \lambda$ продифференцируем обе части равенства (6) и умножим после этого на $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, получим тождественное равенство двух многочленов. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим и решим систему линейных уравнений относительно $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, \lambda$.

Пример 3.10

Вычислить интеграл

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 + 14x + 48} dx &= \int \frac{x^2 + 14x + 48}{\sqrt{x^2 + 14x + 48}} dx = \\ &= (Ax + B)\sqrt{x^2 + 14x + 48} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 14x + 48}}.\end{aligned}$$

Дифференцируя обе части последнего равенства, получаем

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 14x + 48}{\sqrt{x^2 + 14x + 48}} &= A\sqrt{x^2 + 14x + 48} + \\ &+ (Ax + B)\frac{2x + 14}{2\sqrt{x^2 + 14x + 48}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + 14x + 48}}.\end{aligned}$$

Умножив обе части равенства на $\sqrt{x^2 + 14x + 48}$, получим тождество

$$x^2 + 14x + 48 \equiv A(x^2 + 14x + 48) + (Ax + B)(x + 7) + \lambda.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{array}{l|lll} x^2 & 1 = A + A & \Rightarrow A = 1/2, \\ x^1 & 14 = 14A + 7A + B & \Rightarrow B = 7/2, \\ x^0 & 48 = 48A + 7B + \lambda & \Rightarrow \lambda = -1/2. \end{array}$$

В итоге

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 + 14x + 48} dx &= \frac{1}{2}(x + 7)\sqrt{x^2 + 14x + 48} - \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 14x + 48}} = \frac{1}{2}(x + 7)\sqrt{x^2 + 14x + 48} - \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{d(x + 7)}{\sqrt{(x + 7)^2 - 1}} = \frac{1}{2}(x + 7)\sqrt{x^2 + 14x + 48} - \\ &- \frac{1}{2} \ln |x + 7 + \sqrt{x^2 + 14x + 48}| + C.\end{aligned}$$

Методом Остроградского выполняются задания 2 и 4.

4. Пример выполнения индивидуального задания

Пример 4.1

Вычислить интеграл $\int (2x + 1) \operatorname{arctg}(3x) dx$. Будем считать, что $u = \operatorname{arctg}(3x)$, $dv = (2x + 1)dx$. Тогда $du = \frac{3dx}{1 + 9x^2}$ и $v = x^2 + x$. Методом интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \int (2x + 1) \operatorname{arctg}(3x) dx &= (x^2 + x) \operatorname{arctg}(3x) - 3 \int \frac{x^2 + x}{1 + 9x^2} dx = \\ &= (x^2 + x) \operatorname{arctg}(3x) - \frac{1}{3} \int \frac{(9x^2 + 1) + (9x - 1)}{9x^2 + 1} dx = \\ &= (x^2 + x) \operatorname{arctg}(3x) - \frac{1}{3} \int \left(1 + \frac{9x}{9x^2 + 1} - \frac{1}{9x^2 + 1} \right) dx = \\ &= (x^2 + x) \operatorname{arctg}(3x) - \frac{x}{3} - \frac{1}{6} \ln |9x^2 + 1| + \frac{1}{9} \operatorname{arctg}(3x) + C. \end{aligned}$$

Пример 4.2

Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 14x + 40} dx &= \int \frac{x^2 - 14x + 40}{\sqrt{x^2 - 14x + 40}} dx = \\ &= (Ax + B)\sqrt{x^2 - 14x + 40} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 14x + 40}}; \end{aligned}$$

Дифференцируем обе части последнего равенства

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 14x + 40}{\sqrt{x^2 - 14x + 40}} &= A\sqrt{x^2 - 14x + 40} + \\ &+ \frac{(Ax + B)(2x - 14)}{2\sqrt{x^2 - 14x + 40}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - 14x + 40}}. \end{aligned}$$

После умножения на $\sqrt{x^2 - 14x + 40}$ получим

$$x^2 - 14x + 40 \equiv A(x^2 - 14x + 40) + (Ax + B)(x - 7) + \lambda;$$

$$(1 - 2A)x^2 + (21A - 14 - B)x + 40 - 40A + 7B - \lambda \equiv 0;$$

$$\begin{aligned} \text{при } x^2 &\Rightarrow 1 - 2A = 0 & \Rightarrow A = 1/2, \\ \text{при } x^1 &\Rightarrow 21A - 14 - B = 0 & \Rightarrow B = -7/2, \\ \text{при } x^0 &\Rightarrow 40 - 40A + 7B - \lambda = 0 & \Rightarrow \lambda = -9/2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 14x + 40} dx &= \frac{x - 7}{2} \sqrt{x^2 - 14x + 40} - \\ -\frac{9}{2} \int \frac{d(x - 7)}{\sqrt{(x - 7)^2 - 3^2}} &= \frac{x - 7}{2} \sqrt{x^2 - 14x + 40} - \\ -\frac{9}{2} \ln |x - 7 + \sqrt{x^2 - 14x + 40}| + C. \end{aligned}$$

Пример 4.3

Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int (2x^2 + 3x - 1)e^{5x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = 2x^2 + 3x - 1, \quad du = (4x + 3)dx, \\ dv = e^{5x} dx, \quad v = \frac{e^{5x}}{5} \end{array} \right| = \\ &= (2x^2 + 3x - 1) \frac{e^{5x}}{5} - \frac{1}{5} \int (4x + 3)e^{5x} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = 4x + 3, \quad du = 4dx, \\ dv = e^{5x} dx, \quad v = \frac{e^{5x}}{5} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{5}(2x^2 + 3x - 1)e^{5x} - \frac{1}{5} \left[(4x + 3) \frac{e^{5x}}{5} - \frac{4}{5} \int e^{5x} dx \right] = \\ &= \frac{1}{5}(2x^2 + 3x - 1)e^{5x} - \frac{1}{25}(4x + 3)e^{5x} + \frac{4}{125}e^{5x} + C = \\ &= \frac{1}{125}(50x^2 + 55x - 36)e^{5x} + C. \end{aligned}$$

Пример 4.4

Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+2x-48}} dx &= \left[(x^2+2x-48)' = 2x+2 \right] = \\ &= \int \frac{(2x+2)+4}{\sqrt{x^2+2x-48}} dx = \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x-48}} dx + \\ &\quad + 4 \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2-49}} = 2\sqrt{x^2+2x-48} + \\ &\quad + 4 \ln |x+1+\sqrt{x^2+2x-48}| + C. \end{aligned}$$

Пример 4.5

Вычислить интеграл

$$\int \frac{-18+17x-2x^2}{(x-2)(x+2)(x-3)} dx.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби

$$\frac{-18+17x-2x^2}{(x-2)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3},$$

откуда

$$\begin{aligned} -18+17x-2x^2 &\equiv \\ &\equiv A(x+2)(x-3) + B(x-2)(x-3) + C(x-2)(x+2). \end{aligned}$$

Найдем коэффициенты A, B, C

$$\begin{aligned} \text{при } x = 2 &\Rightarrow 8 = -4A \Rightarrow A = -2, \\ \text{при } x = -2 &\Rightarrow 60 = -20B \Rightarrow B = -3, \\ \text{при } x = 3 &\Rightarrow 15 = 5C \Rightarrow C = 3. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int \frac{-18+17x-2x^2}{(x-2)(x+2)(x-3)} dx &= \int \frac{-2}{x-2} dx - \int \frac{3}{x+2} dx + \\ &+ \int \frac{3}{x-3} dx = -2 \ln |x-2| - 3 \ln |x+2| + 3 \ln |x-3| + C. \end{aligned}$$

Пример 4.6

Вычислить интеграл $\int \frac{3x - 4}{(x + 2)(x^2 + 2x + 2)} dx.$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби

$$\frac{3x - 4}{(x + 2)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2};$$

$$3x - 4 \equiv A(x^2 + 2x + 2) + (Bx + C)(x + 2).$$

$$\begin{aligned} \text{при } x = -2 &\Rightarrow 10 = -2A \Rightarrow A = -5, \\ \text{при } x^2 &\Rightarrow 0 = A + B \Rightarrow B = 5, \\ \text{при } x^0 &\Rightarrow -4 = 2A + 2C \Rightarrow C = 3. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \int \frac{3x - 4}{(x + 2)(x^2 + 2x + 2)} dx &= - \int \frac{5}{x + 2} dx + \int \frac{5x + 3}{x^2 + 2x + 2} dx = \\ &= -5 \ln |x + 2| + \frac{5}{2} \int \frac{(2x + 2) - 4/5}{x^2 + 2x + 2} dx = \\ &= -5 \ln |x + 2| + \frac{5}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx - 2 \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \\ &= -5 \ln |x + 2| + \frac{5}{2} \ln |x^2 + 2x + 2| - 2 \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} = \\ &= \frac{5}{2} \ln |x^2 + 2x + 2| - 5 \ln |x + 2| - 2 \arctg(x + 1) + C. \end{aligned}$$

Пример 4.7

Вычислить интеграл

$$\int \frac{29e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx = 29 \int e^{\arcsin x} d(\arcsin x) = 29e^{\arcsin x} + C.$$

Пример 4.8

Вычислить интеграл $\int \frac{\cos x + 2 \sin x}{\cos x - \sin x + 1} dx.$

Применим универсальную подстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $x = 2 \operatorname{arctg} t$,

$$dx = \frac{2 dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}. \text{ Получим}$$

$$\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} + 1} \frac{2 dt}{1+t^2} = \int \frac{-1+t^2-4t}{(1+t^2)(t-1)} dt.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби

$$\frac{-1+t^2-4t}{(1+t^2)(t-1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+1}.$$

Следовательно $t^2 - 4t - 1 \equiv A(t^2 + 1) + (Bt + C)(t - 1)$. Откуда

$$\begin{aligned} \text{при } t = 1 &\Rightarrow -4 = 2A \Rightarrow A = -2, \\ \text{при } t^0 &\Rightarrow -1 = A - C \Rightarrow C = -1, \\ \text{при } t^2 &\Rightarrow 1 = A + B \Rightarrow B = 3. \end{aligned}$$

Остается проинтегрировать простейшие дроби

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{3t-1}{1+t^2} - \frac{2}{t-1} \right) dt &= \frac{3}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt - \int \frac{1}{t^2+1} dt - \\ -2 \ln |t-1| &= \frac{3}{2} \ln |t^2+1| - \operatorname{arctg} t - 2 \ln |t-1| = \\ &= \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 \right| - \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) - 2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right| + C = \\ &= -3 \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| - \frac{x}{2} - 2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right| + C. \end{aligned}$$

Пример 4.9

Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{3}{\sqrt{x-2}} - \frac{4}{\sqrt{16-x^2}} + \frac{15}{1+25x^2} \right) dx &= \\ = 3 \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{x-2}} - 4 \int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} + \frac{15}{5} \int \frac{d(5x)}{1+(5x)^2} &= \\ = 6\sqrt{x-2} - 4 \arcsin \frac{x}{4} + 3 \operatorname{arctg}(5x) + C. & \end{aligned}$$

Пример 4.10

Вычислить интеграл $\int \frac{-3 \cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$.

Применим универсальную подстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $x = 2 \arctg t$,

$$dx = \frac{2 dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Получим

$$\begin{aligned} & \int \frac{-3 \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} - \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} + \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2dt}{1+t^2} = \\ & = \frac{1}{2} \int \frac{-3 + 10t^2 - 3t^4 - 2t + 2t^3}{(1+t^2)t} dt \end{aligned}$$

Выделим целую часть неправильной дроби и простейшие дроби:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{-3t^4 + 2t^3 + 10t^2 - 2t - 3}{(1+t^2)t} dt &= \int \left(\frac{-3t}{2} + 1 + \frac{8t-2}{1+t^2} - \frac{3}{2t} \right) dt = \\ &= -\frac{3t^2}{4} + t - \frac{3}{2} \ln |t| + 4 \int \frac{2t}{t^2+1} dt - 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt = \\ &= -\frac{3t^2}{4} + t - \frac{3}{2} \ln |t| + 4 \ln |1+t^2| - 2 \arctg t + C = \left[t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] = \\ &= -\frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + 4 \ln \left| 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right| - x + C. \end{aligned}$$

5. Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

- 1) $\int (-6 - x + x^2) \ln 5x dx,$ 2) $\int \sqrt{48 - x^2 - 8x} dx,$
3) $\int -(1 - x) \operatorname{arctg} 4x dx,$ 4) $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 4x + 20}} dx,$
5) $\int -\frac{2x^2 + 31x + 145}{(x - 3)(x + 5)^2} dx,$ 6) $\int \frac{2(5x^2 + 2x - 2)}{(3 + x)(x^2 - 6x + 10)} dx,$
7) $\int \frac{-3}{\sqrt{\arccos 3x} \sqrt{1 - 9x^2}} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - 3 \sin x}{\cos x - 3 \sin x + 3} dx,$

9) $\int \left(-5e^{5x} + 15 \sin 3x + 5 \frac{1}{x} \right) dx,$
10) $\int \frac{-4 \cos^2 x + 3 \sin x \cos x + 5 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 2

- 1) $\int 2e^{-2x}(6 + 7x - x^2) dx,$ 2) $\int \frac{1 - 3x + x^2}{\sqrt{x^2 + 8x + 12}} dx,$
3) $\int (2 + 3x) \cos 4x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 35}} dx,$
5) $\int -\frac{2x^2 - 17x + 18}{(x - 3)(x^2 - 4)} dx,$ 6) $\int \frac{(9x^2 + 14x - 22)}{(3 + x)(x^2 - 2x + 2)} dx,$
7) $\int 4 \cos 2x e^{\sin 2x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + 3 \sin x}{\cos x - \sin x + 1} dx,$
9) $\int \left(-10e^{-5x} + 4 \cos 2x + \frac{3}{x} \right) dx,$
10) $\int \frac{-2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 3

- 1) $\int (8 - 5x - 8x^2) \ln 6x dx,$ 2) $\int \frac{1 - 3x + x^2}{\sqrt{-3 - x^2 - 4x}} dx,$
3) $\int (x - 3) \sin 2x dx,$ 4) $\int \frac{2x + 5}{\sqrt{6x + x^2}} dx,$
5) $\int \frac{-6x^2 + 8}{(x - 2)(x + 2)^2} dx,$ 6) $\int \frac{(4 + 8x + 5x^2) dx}{(3 + 2x)(10 + 6x + x^2)},$
7) $\int \frac{-24}{\sqrt{\operatorname{arcctg} 6x}(1 + 36x^2)} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + \sin x}{2 \cos x - \sin x + 1} dx,$

9) $\int \left(\frac{14}{1 + 49x^2} + 3e^x + 25 \cos 5x \right) dx,$
10) $\int \frac{-5 \cos^2 x - \sin x \cos x + 4 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 4

- 1) $\int (9 - 60x - 18x^2)e^{6x} dx,$ 2) $\int \sqrt{x^2 + 2x - 3} dx,$
3) $\int (x - 2) \arccos 5x dx,$ 4) $\int \frac{3 + 2x}{\sqrt{x^2 - 10x + 9}} dx,$
5) $\int \frac{x^2 + 10x - 35}{(3 + x)(x - 1)(x - 4)} dx,$ 6) $\int \frac{(23x^2 - 14x - 17) dx}{3(x - 1)(x^2 + 2x + 5)},$
7) $\int -12 \frac{e^{\operatorname{arcctg} 2x}}{1 + 4x^2} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + 2 \sin x}{3 \cos x - 3 \sin x + 3} dx,$

9) $\int \left(\frac{-3}{\sqrt{x}} - \frac{25}{1 + 25x^2} - \frac{18}{\sqrt{1 - 36x^2}} \right) dx,$
10) $\int \frac{-2 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x + \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 5

- 1) $\int (4x - 1 - x^2) \ln 9x dx$, 2) $\int \sqrt{48 - x^2 - 2x} dx$,
3) $\int -(x + 1) \sin 5x dx$, 4) $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 10x - 11}} dx$,
5) $\int -\frac{3x^2 + 14x + 19}{(x - 1)(x + 2)^2} dx$, 6) $\int \frac{(17x^2 + 34x + 21) dx}{(x + 1)(x^2 + 2x + 5)}$,
7) $\int -72 \frac{e^{\arccos 9x}}{\sqrt{1 - 81x^2}} dx$, 8) $\int \frac{(\cos x + 2 \sin x) dx}{2 \cos x - 3 \sin x + 3}$,

9) $\int \left(-12 \cos 4x + \frac{20}{\sqrt{16 - 25x^2}} + \frac{5}{x} \right) dx$,
10) $\int \frac{-3 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + 3 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx$.

Вариант 6

- 1) $\int (-30 + 32x + 16x^2) e^{4x} dx$, 2) $\int \frac{-3 - x + 3x^2}{\sqrt{-16 + 6x + x^2}} dx$,
3) $\int -(x + 2) \arcsin 5x dx$, 4) $\int \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} dx$,
5) $\int \frac{x^2 - 20x + 46}{(x + 2)(x - 3)(x - 4)} dx$, 6) $\int \frac{2(11x^2 - 4x - 6) dx}{(3x - 2)(x^2 + 2x + 2)}$,
7) $\int -64 \sin 8x e^{\cos 8x} dx$, 8) $\int \frac{\cos x + 2 \sin x}{\cos x - 3 \sin x + 3} dx$,

9) $\int \left(-20e^{-5x} + \frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$,
10) $\int \frac{-2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + 5 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx$.

Вариант 7

- 1) $\int (-7 - 5x - 3x^2) \ln 4x dx,$ 2) $\int \frac{-3 + x + 2x^2}{\sqrt{-7 - x^2 + 8x}} dx,$
3) $\int (-2 + 3x) \operatorname{arctg} 5x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 + 10x + 24}} dx,$
5) $\int -3 \frac{2x^2 + 17x + 29}{(x - 1)(x + 5)^2} dx,$ 6) $\int \frac{(-9 + 14x + 7x^2)}{(3 + x)(13 + 6x + x^2)} dx,$
7) $\int -18 \cos 3x e^{\sin 3x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x - 3 \sin x + 3} dx,$
9) $\int \left(\frac{-2}{\sqrt{x}} - 5e^{-x} + \frac{35}{\sqrt{16 - 49x^2}} \right) dx,$
10) $\int \frac{-5 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + 4 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 8

- 1) $\int (-12 - 48x - 27x^2) e^{-9x} dx,$ 2) $\int \sqrt{x^2 - 4x - 21} dx,$
3) $\int (1 - 3x) \arccos 2x dx,$ 4) $\int \frac{2x + 5}{\sqrt{x^2 + 10x + 34}} dx,$
5) $\int \frac{7x^2 - 27x - 12}{(x + 2)(x - 3)(x - 5)} dx,$ 6) $\int \frac{(-x^2 - 20x + 36)}{(3 + 2x)(x^2 - 6x + 10)} dx,$
7) $\int 24 \frac{e^{\operatorname{arcctg} 3x}}{1 + 9x^2} dx,$ 8) $\int \frac{(\cos x - 3 \sin x) dx}{\cos x - 2 \sin x + 2},$
9) $\int \left(\frac{14}{4 + 49x^2} - 10 \sin 2x + 9e^{-3x} \right) dx,$
10) $\int \frac{-5 \cos^2 x - \sin x \cos x + 2 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 9

- 1) $\int (-4 + 2x - 7x^2) \ln 7x dx,$ 2) $\int \sqrt{60 - x^2 + 4x} dx,$
3) $\int -(2x - 3) \sin x dx,$ 4) $\int \frac{2x + 2}{\sqrt{5 + 6x + x^2}} dx,$
5) $\int -\frac{x^2 - 19x - 113}{(x - 2)(x + 5)^2} dx,$ 6) $\int \frac{4(15 + 9x + 2x^2)}{(x + 2)(18 + 6x + x^2)} dx,$
7) $\int 12 \frac{1}{\sqrt{\arcsin 4x} \sqrt{1 - 16x^2}} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - 2 \sin x}{3 \cos x - \sin x + 1} dx,$

9) $\int \left(6 \frac{1}{\sqrt{4 - 9x^2}} + \frac{25}{1 + 25x^2} + 6e^{-3x} \right) dx,$
10) $\int \frac{-3 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 10

- 1) $\int e^{9x} (-42 + 35x + 36x^2) dx,$ 2) $\int \frac{-3 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x - 21}} dx,$
3) $\int (x - 1) \cos 2x dx,$ 4) $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - 10x}} dx,$
5) $\int \frac{x^2 + 12x - 12}{(x - 6)(x^2 - 4)} dx,$ 6) $\int \frac{(-31 + 6x + 13x^2)}{(x + 1)(13 + 6x + x^2)} dx,$
7) $\int 16 \frac{1}{\sqrt{\arcsin 8x} \sqrt{1 - 64x^2}} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + 2 \sin x}{\cos x - 2 \sin x + 2} dx,$

9) $\int \left(\frac{-20}{\sqrt{4 - 25x^2}} + \frac{5}{x} - 15 \sin 3x \right) dx,$
10) $\int \frac{-3 \cos^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 11

- 1) $\int (-8 + 8x + 7x^2) \ln 5x dx,$ 2) $\int \frac{1 - x + x^2}{\sqrt{-3 - x^2 - 4x}} dx,$
3) $\int (1 - x) \cos 2x dx,$ 4) $\int \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x + 29}} dx,$
5) $\int \frac{-6 + 18x + 5x^2}{(x - 2)(3 + x)^2} dx,$ 6) $\int \frac{(9x^2 + 8x - 7)dx}{(3 + x)(x^2 - 8x + 17)},$
7) $\int 32 \frac{1}{(1 + 16x^2) \operatorname{arctg} 4x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + 2 \sin x}{2 \cos x - 3 \sin x + 3} dx,$

9) $\int \left(-4e^{-x} + \frac{6}{\sqrt{1 - 4x^2}} + \frac{10}{1 + 25x^2} \right) dx,$
10) $\int \frac{-5 \cos^2 x + 3 \sin x \cos x + 3 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 12

- 1) $\int (-29 - 64x - 28x^2)e^{7x} dx,$ 2) $\int \sqrt{x^2 + 8x + 52} dx,$
3) $\int (1 - 3x) \arcsin 4x dx,$ 4) $\int \frac{3 + 2x}{\sqrt{x^2 + 4x - 21}} dx,$
5) $\int \frac{x^2 - 6x + 32}{(x + 2)(x - 4)(x - 6)} dx,$ 6) $\int \frac{(-7x^2 - 4x + 16)dx}{2(x - 1)(x^2 - 4x + 8)},$
7) $\int 24 \sin 3x e^{\cos 3x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x + 1} dx,$

9) $\int \left(-5 \sin x - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{15}{\sqrt{4 - 9x^2}} \right) dx,$
10) $\int \frac{-2 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 13

- 1) $\int (-8 + x + 9x^2) \ln 5x dx,$ 2) $\int \sqrt{35 - x^2 + 2x} dx,$
3) $\int (2 - 3x) \arccos 2x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 + 10x + 74}} dx,$
5) $\int \frac{4x^2 + 17x - 23}{(x - 3)(x + 5)^2} dx,$ 6) $\int \frac{(-7x^2 + 8x - 19)dx}{(x + 1)(x^2 - 8x + 25)},$
7) $\int 64 \frac{1}{(1 + 64x^2) \operatorname{arctg} 8x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + 2 \sin x}{3 \cos x - 3 \sin x + 3} dx,$

9) $\int \left(6 \cos 2x - 15 \sin 5x + \frac{15}{1 + 9x^2} \right) dx,$
10) $\int \frac{-6 \cos^2 x - 4 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 14

- 1) $\int (-27 + 28x - 30x^2) e^{-6x} dx,$ 2) $\int \frac{-1 - 3x - 3x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 53}} dx,$
3) $\int (1 - 3x) \arccos 3x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 10x - 39}} dx,$
5) $\int -\frac{x^2 - 13x + 6}{(x - 4)(x^2 - 1)} dx,$ 6) $\int \frac{-2(11x^2 - 29x - 31)dx}{(x - 2)(x^2 + 8x + 25)},$
7) $\int \frac{-20}{(1 + 25x^2) \operatorname{arcctg} 5x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - \sin x}{2 \cos x - 2 \sin x + 2} dx,$

9) $\int \left(\frac{24}{9 + 16x^2} + 16 \cos 4x + \frac{25}{\sqrt{9 - 25x^2}} \right) dx,$
10) $\int \frac{-6 \cos^2 x - 5 \sin x \cos x + \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 15

- 1) $\int (6 - x + 3x^2) \ln 5x dx,$ 2) $\int \frac{-1 + x - x^2}{\sqrt{-x^2 - 8x}} dx,$
3) $\int (-1 + 3x) \cos 2x dx,$ 4) $\int \frac{3 + 2x}{\sqrt{x^2 - 4x - 12}} dx,$
5) $\int -\frac{7x + 29}{(x - 3)(x + 2)^2} dx,$ 6) $\int \frac{(-5x^2 + 8x + 72)dx}{(3 + 2x)(x^2 - 4x + 8)},$
7) $\int 10 \frac{1}{\sqrt{1 - 25x^2} \arcsin(5x)} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - 2 \sin x}{3 \cos x - 2 \sin x + 2} dx,$

9) $\int \left(4e^x - 2 \sin 2x + \frac{35}{\sqrt{16 - 49x^2}} \right) dx,$
10) $\int \frac{-6 \cos^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 16

- 1) $\int (14 + 42x - 27x^2)e^{-9x} dx,$ 2) $\int \sqrt{x^2 - 6x + 13} dx,$
3) $\int (2 - x) \cos 3x dx,$ 4) $\int \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x - 48}} dx,$
5) $\int \frac{-2(3x^2 - 6x - 10)}{(3 + x)(x - 2)(x - 4)} dx,$ 6) $\int \frac{(11x^2 - 28x + 4)dx}{3(1 - x)(x^2 - 8x + 20)},$
7) $\int 16 \sin 2x e^{\cos 2x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - 2 \sin x}{3 \cos x - \sin x + 1} dx,$

9) $\int \left(5e^{5x} - \frac{9}{\sqrt{1 - 9x^2}} + \frac{3}{x} \right) dx,$
10) $\int \frac{-5 \cos^2 x - 4 \sin x \cos x + 4 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 17

- 1) $\int (-3 + 4x - 9x^2) \ln 5x dx,$ 2) $\int \sqrt{48 - x^2 + 2x} dx,$
3) $\int (-3 - 3x) \arccos 3x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 8x}} dx,$
5) $\int -\frac{8x^2 + 55x + 81}{(x-1)(x+5)^2} dx,$ 6) $\int \frac{-2(10x^2 + 14x + 13)}{(1+3x)(x^2 + 2x + 10)} dx,$
7) $\int \frac{-48}{\sqrt{1 - 36x^2} \arcsin 6x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + 3 \sin x}{2 \cos x - 3 \sin x + 3} dx,$

9) $\int \left(\frac{-8}{\sqrt{9 - 16x^2}} - 15 \sin 5x + 4 \cos x \right) dx,$
10) $\int \frac{-6 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 18

- 1) $\int (-32 - 44x + 12x^2) e^{6x} dx,$ 2) $\int \frac{1 - x + x^2}{\sqrt{x^2 + 10x - 24}} dx,$
3) $\int (x - 3) \operatorname{arcctg} 2x dx,$ 4) $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 10x - 24}} dx,$
5) $\int \frac{11 - x}{(3 + x)(x - 4)} dx,$ 6) $\int \frac{(13x^2 - 6x - 10)}{(2x + 1)(x^2 + 2x + 2)} dx,$
7) $\int 24 \frac{\sin 6x}{\sqrt{\cos 6x}} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + 3 \sin x}{\cos x - \sin x + 1} dx,$

9) $\int \left(10 \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{x}} - 5e^{-x} \right) dx,$
10) $\int \frac{-3 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x + \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 19

- 1) $\int (-6 + 7x - 3x^2) \ln 2x dx$, 2) $\int \frac{-2 - 2x - x^2}{\sqrt{-x^2 - 8x}} dx$,
3) $\int (-2 - 3x) \arccos 4x dx$, 4) $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 8x + 65}} dx$,
5) $\int -\frac{8x^2 - 5}{(x - 2)(x + 1)^2} dx$, 6) $\int \frac{(3x^2 + 6x - 7)dx}{(3 + x)(x^2 + 8x + 17)}$,
7) $\int \frac{-8}{\sqrt{\operatorname{arcctg} 4x}(1 + 16x^2)} dx$, 8) $\int \frac{\cos x - 3 \sin x}{2 \cos x - 3 \sin x + 3} dx$,
9) $\int \left(\frac{140}{16 + 49x^2} + 4 \frac{1}{x} + 20 \frac{1}{\sqrt{16 - 25x^2}} \right) dx$,
10) $\int \frac{-5 \cos^2 x - 5 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx$.

Вариант 20

- 1) $\int (-14 - 30x + 12x^2)e^{-4x} dx$, 2) $\int \sqrt{25 + 6x + x^2} dx$,
3) $\int (1 - x) \arcsin 3x dx$, 4) $\int \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 - 4x - 21}} dx$,
5) $\int \frac{-2x^2 + 9x - 19}{(x + 2)(x - 1)(x - 3)} dx$, 6) $\int \frac{(-16 - 6x + 5x^2)dx}{3(x + 1)(10 + 6x + x^2)}$,
7) $\int \frac{6}{\sqrt{\arcsin 2x} \sqrt{1 - 4x^2}} dx$, 8) $\int \frac{\cos x - 2 \sin x}{3 \cos x - 2 \sin x + 2} dx$,
9) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{1 + 9x^2} - 3 \sin x \right) dx$,
10) $\int \frac{-2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + 5 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$.

Вариант 21

- 1) $\int (-4 + 2x + 3x^2) \ln 4x dx,$ 2) $\int \sqrt{21 - x^2 - 4x} dx,$
3) $\int (-1 - 2x) \arccos 3x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 48}} dx,$
5) $\int -\frac{34 + 27x + 3x^2}{(x - 2)(3 + x)^2} dx,$ 6) $\int \frac{(18 - 6x - 37x^2) dx}{3(x + 1)(18 + 6x + x^2)},$
7) $\int -16 \frac{\cos 8x}{\sqrt{\sin(8x)}} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + 3 \sin x}{\cos x - \sin x + 1} dx,$

9) $\int \left(\frac{4}{x} - \frac{2}{1 + 4x^2} - 4e^{4x} \right) dx,$
10) $\int \frac{-4 \cos^2 x - 5 \sin x \cos x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 22

- 1) $\int (25 - 14x - 4x^2)e^{4x} dx,$ 2) $\int \frac{x^2 - 2x + 2}{\sqrt{x^2 - 8x + 12}} dx,$
3) $\int -(2 - 2x) \sin 5x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 10x + 16}} dx,$
5) $\int -2 \frac{x^2 + 5x - 42}{(x - 5)(-9 + x^2)} dx,$ 6) $\int \frac{(11x^2 + 28x - 73) dx}{2(1 - x)(x^2 + 8x + 25)},$
7) $\int 6 \cos 3x e^{\sin 3x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - 2 \sin x}{2 \cos x - 2 \sin x + 2} dx,$

9) $\int \left(\frac{-2}{\sqrt{x}} - \frac{36}{9 + 16x^2} + 3e^x \right) dx,$
10) $\int \frac{-3 \cos^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 23

- 1) $\int -(-5 - 2x + x^2) \ln 7x dx,$ 2) $\int \frac{-2 + x - 3x^2}{\sqrt{7 - x^2 + 6x}} dx,$
3) $\int (1 + 3x) \arccos 4x dx,$ 4) $\int \frac{2x + 5}{\sqrt{x^2 - 10x + 50}} dx,$
5) $\int -2 \frac{4x^2 + 19x + 5}{(x - 3)(x + 4)^2} dx,$ 6) $\int \frac{3(-7x^2 - 16x + 21)}{(x + 2)(x^2 - 4x + 13)} dx,$
7) $\int 12 \frac{1}{(1 + 9x^2) \operatorname{arcctg} 3x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x + 1} dx,$
9) $\int \left(-4e^{4x} - \frac{20}{\sqrt{9 - 16x^2}} - \frac{5}{\sqrt{x}} \right) dx,$
10) $\int \frac{-4 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + 4 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 24

- 1) $\int (-6 - 19x - 15x^2) e^{3x} dx,$ 2) $\int \sqrt{-55 + 6x + x^2} dx,$
3) $\int -(3 - 3x) \sin 4x dx,$ 4) $\int \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x - 60}} dx,$
5) $\int -3 \frac{x - 7}{(x - 2)(-9 + x^2)} dx,$ 6) $\int \frac{2(7x^2 + 14x - 11)}{(2x + 1)(x^2 - 6x + 13)} dx,$
7) $\int \frac{-36}{\sqrt{1 - 81x^2} \arcsin 9x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + 2 \sin x}{\cos x - 3 \sin x + 3} dx,$
9) $\int \left(3 \cos x - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{112}{16 + 49x^2} \right) dx,$
10) $\int \frac{-5 \cos^2 x + 5 \sin x \cos x + 3 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 25

- 1) $\int (9 + 2x + 8x^2) \ln 2x dx,$ 2) $\int \sqrt{16 - x^2 + 6x} dx,$
3) $\int (-2 - 2x) \cos 3x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 15}} dx,$
5) $\int \frac{5x^2 + x + 6}{(x - 1)(x + 1)^2} dx,$ 6) $\int \frac{(47x^2 + 36x - 16)dx}{(1 + 3x)(x^2 - 8x + 20)},$
7) $\int \frac{48}{(1 + 64x^2)\operatorname{arcctg} 8x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - \sin x}{2 \cos x - 2 \sin x + 2} dx,$

9) $\int \left(-9 \cos 3x - \frac{80}{16 + 25x^2} - 4 \sin x \right) dx,$
10) $\int \frac{-2 \cos^2 x + \sin x \cos x + 4 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 26

- 1) $\int e^{8x}(59 + 34x + 40x^2) dx,$ 2) $\int \frac{-2 - x + x^2}{\sqrt{x^2 - 10x + 34}} dx,$
3) $\int (-3 + 3x) \arcsin 5x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 5}{\sqrt{x^2 - 4x - 45}} dx,$
5) $\int -\frac{x^2 - 13}{(x + 1)(x - 2)(x - 3)} dx,$ 6) $\int \frac{(-42 - 72x + 17x^2)dx}{(1 + 3x)(18 + 6x + x^2)},$
7) $\int 48 \frac{e^{\operatorname{arcctg} 8x}}{1 + 64x^2} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - 2 \sin x}{3 \cos x - 3 \sin x + 3} dx,$

9) $\int \left(-2 \cos x - 16e^{-4x} - \frac{21}{\sqrt{16 - 49x^2}} \right) dx,$
10) $\int \frac{-3 \cos^2 x + 5 \sin x \cos x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 27

- 1) $\int 5(1 + x + x^2) \ln 7x dx$, 2) $\int \frac{2 + 2x - 3x^2}{\sqrt{-7 - x^2 - 8x}} dx$,
3) $\int -(-1 - x) \operatorname{arctg} 2x dx$, 4) $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 10x - 24}} dx$,
5) $\int -3 \frac{18 + 7x + x^2}{(x - 3)(3 + x)^2} dx$, 6) $\int \frac{2(21 + 6x - 2x^2)}{(x + 1)(18 + 6x + x^2)} dx$,
7) $\int -48 \frac{e^{\operatorname{arcctg} 6x}}{1 + 36x^2} dx$, 8) $\int \frac{\cos x - 2 \sin x}{2 \cos x - 2 \sin x + 2} dx$,

9) $\int \left(15e^{5x} - \frac{4}{\sqrt{1 - 4x^2}} + 15 \sin 3x \right) dx$,
10) $\int \frac{-6 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + 5 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$.

Вариант 28

- 1) $\int (8x - 8 - 3x^2)e^{-3x} dx$, 2) $\int \sqrt{x^2 - 4x - 45} dx$,
3) $\int (x + 2) \operatorname{arcctg} 2x dx$, 4) $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}} dx$,
5) $\int \frac{x^2 - 17x - 24}{(3 + x)(x - 1)(x - 6)} dx$, 6) $\int \frac{(49x^2 - 50x + 22)}{(2x - 1)(x^2 - 2x + 10)} dx$,
7) $\int 72 \cos 9x e^{\sin 9x} dx$, 8) $\int \frac{\cos x + 2 \sin x}{\cos x - \sin x + 1} dx$,

9) $\int \left(\frac{40}{4 + 25x^2} - 15 \sin 5x - 2e^{2x} \right) dx$,
10) $\int \frac{-4 \cos^2 x + \sin x \cos x + 3 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx$.

Вариант 29

- 1) $\int (4 - 2x - 5x^2) \ln 5x dx$, 2) $\int \sqrt{-9 - x^2 - 10x} dx$,
3) $\int -(1 - 3x) \arcsin 5x dx$, 4) $\int \frac{2x - 4}{\sqrt{x^2 + 2x - 15}} dx$,
5) $\int \frac{8x^2 + 24x + 13}{(x - 1)(x + 2)^2} dx$, 6) $\int \frac{2(3x^2 - 16x + 11)}{(2x - 3)(x^2 - 6x + 13)} dx$,
7) $\int 12 \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx$, 8) $\int \frac{\cos x + \sin x}{2 \cos x - 3 \sin x + 3} dx$,

9) $\int \left(10e^{-5x} + 15 \frac{1}{\sqrt{1 - 25x^2}} + 5 \cos x \right) dx$,
10) $\int \frac{-4 \cos^2 x + 3 \sin x \cos x + 5 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx$.

Вариант 30

- 1) $\int (36 + x - 15x^2)e^{-5x} dx$, 2) $\int \frac{-3 + x + 2x^2}{\sqrt{x^2 - 10x + 34}} dx$,
3) $\int -(x - 3) \arcsin 4x dx$, 4) $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 2x - 48}} dx$,
5) $\int \frac{x^2 - 12x + 32}{(x - 3)(x^2 - 4)} dx$, 6) $\int \frac{(-25x^2 + 6x + 14)}{3(x + 1)(x^2 - 6x + 10)} dx$,
7) $\int \frac{24}{(1 + 16x^2) \operatorname{arctg} 4x} dx$, 8) $\int \frac{\cos x + 3 \sin x}{2 \cos x - \sin x + 1} dx$,

9) $\int \left(3 \sin x + \frac{3}{x} - \frac{20}{\sqrt{9 - 16x^2}} \right) dx$,
10) $\int \frac{-2 \cos^2 x + 5 \sin x \cos x + 3 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx$.

Вариант 31

- 1) $\int 4(-1 + 2x + x^2) \ln 9x dx,$ 2) $\int \frac{1 - 2x - 2x^2}{\sqrt{3 - x^2 - 2x}} dx,$
3) $\int (-3 - x) \operatorname{arcctg} 4x dx,$ 4) $\int \frac{2x + 5}{\sqrt{x^2 - 2x - 15}} dx,$
5) $\int 3 \frac{x + 11}{(x - 1)(x + 5)^2} dx,$ 6) $\int \frac{(11x^2 - 14x - 34)dx}{2(x + 1)(x^2 + 2x + 10)},$
7) $\int -20 \cos 5x e^{\sin 5x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - 2 \sin x + 2} dx,$

9) $\int \left(\frac{2}{x} - \frac{36}{9 + 16x^2} - 10 \cos 2x \right) dx,$
10) $\int \frac{-5 \cos^2 x - \sin x \cos x + 3 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 32

- 1) $\int (9 - 6x^2) e^{-2x} dx,$ 2) $\int \sqrt{x^2 + 8x - 48} dx,$
3) $\int (-1 - 2x) \arccos 4x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 10x + 34}} dx,$
5) $\int \frac{2x^2 + 5x - 54}{(x - 5)(x^2 - 4)} dx,$ 6) $\int \frac{(13x^2 + 12x + 9)dx}{(1 - 3x)(x^2 - 8x + 17)},$
7) $\int \frac{-9}{\sqrt{\operatorname{arctg} 9x}(1 + 81x^2)} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x + 1} dx,$

9) $\int \left(8e^{4x} - \frac{9}{\sqrt{4 - 9x^2}} + \frac{5}{x} \right) dx,$
10) $\int \frac{-3 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + 5 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 33

- 1) $\int (3 - 2x + 7x^2) \ln 7x dx,$ 2) $\int \sqrt{-15 - x^2 + 8x} dx,$
3) $\int (3 + 2x) \operatorname{arcctg} 4x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 8x + 32}} dx,$
5) $\int 2 \frac{3x^2 + 29x + 58}{(x - 1)(x + 5)^2} dx,$ 6) $\int -\frac{(34 + 26x + 7x^2) dx}{(x + 1)(10 + 6x + x^2)},$
7) $\int \frac{5}{\sqrt{\arccos 5x} \sqrt{1 - 25x^2}} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - 3 \sin x + 3} dx,$
9) $\int \left(\frac{4}{x} + \frac{4}{\sqrt{1 - 4x^2}} + \frac{4}{\sqrt{x}} \right) dx,$
10) $\int \frac{-5 \cos^2 x + 3 \sin x \cos x + \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 34

- 1) $\int (-10 + 27x - 21x^2) e^{-7x} dx,$ 2) $\int \frac{3 + 3x - 3x^2}{\sqrt{x^2 + 4x - 12}} dx,$
3) $\int (-1 - x) \arcsin 3x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 48}} dx,$
5) $\int -2 \frac{x^2 + 5x - 41}{(x + 1)(x - 4)(x - 5)} dx,$ 6) $\int \frac{(-x^2 + 12x + 28) dx}{(x + 1)(x^2 + 4x + 8)},$
7) $\int -12 \frac{e^{\operatorname{arcctg} 6x}}{1 + 36x^2} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - 3 \sin x}{2 \cos x - 2 \sin x + 2} dx,$
9) $\int \left(-10e^{5x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{14}{\sqrt{4 - 49x^2}} \right) dx,$
10) $\int \frac{-6 \cos^2 x - \sin x \cos x + 5 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 35

- 1) $\int (-4 + x + 2x^2) \ln 9x dx$, 2) $\int \frac{2 + x + x^2}{\sqrt{7 - x^2 + 6x}} dx$,
3) $\int (1 - 3x) \operatorname{arcctg} 5x dx$, 4) $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x - 16}} dx$,
5) $\int \frac{3x - 7}{(x - 1)(x + 1)^2} dx$, 6) $\int \frac{(-19x^2 + 12x - 68)dx}{(x - 2)(x^2 + 8x + 20)}$,
7) $\int \frac{24}{\sqrt{1 - 16x^2} \arccos 4x} dx$, 8) $\int \frac{\cos x + \sin x}{2 \cos x - \sin x + 1} dx$,

9) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 25 \cos 5x + 5 \sin x \right) dx$,
10) $\int \frac{-6 \cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx$.

Вариант 36

- 1) $\int (-24 - 46x - 30x^2) e^{6x} dx$, 2) $\int \sqrt{x^2 + 10x + 29} dx$,
3) $\int -(1 + 3x) \arcsin 4x dx$, 4) $\int \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 65}} dx$,
5) $\int 12(-9 + x^2)^{-1} dx$, 6) $\int \frac{3(15x^2 - 14x - 8)dx}{(2x - 1)(x^2 + 2x + 10)}$,
7) $\int 20 \sin 5x e^{\cos 5x} dx$, 8) $\int \frac{\cos x + 3 \sin x}{2 \cos x - 2 \sin x + 2} dx$,

9) $\int \left(-5 \sin 5x + 10 \cos 5x + \frac{75}{9 + 25x^2} \right) dx$,
10) $\int \frac{-4 \cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$.

Вариант 37

- 1) $\int (8 + 7x + 8x^2) \ln 8x dx,$ 2) $\int \sqrt{5 - x^2 + 4x} dx,$
3) $\int (3 + x) \operatorname{arcctg} 3x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 52}} dx,$
5) $\int -\frac{6x^2 - x - 3}{(x - 3)(x + 1)^2} dx,$ 6) $\int \frac{(17x^2 - 16x + 12)dx}{(x - 1)(x^2 + 4x + 8)},$
7) $\int 6 \frac{\cos 3x}{\sin 3x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - 3 \sin x}{2 \cos x - \sin x + 1} dx,$
9) $\int \left(\frac{2}{x} - 3 \sin 3x + 6e^{2x} \right) dx,$
10) $\int \frac{-5 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x + 3 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 38

- 1) $\int (-32 - 24x - 36x^2)e^{6x} dx,$ 2) $\int \frac{3 - x + 2x^2}{\sqrt{x^2 - 10x + 9}} dx,$
3) $\int (x - 3) \arccos 2x dx,$ 4) $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 10x + 34}} dx,$
5) $\int \frac{x^2 + 16x - 27}{(x - 6)(x^2 - 1)} dx,$ 6) $\int \frac{(-13x^2 - 32x - 37)dx}{(x + 2)(x^2 - 4x + 13)},$
7) $\int 8 \cos 2x e^{\sin 2x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x - 2 \sin x + 2} dx,$
9) $\int \left(-\frac{35}{\sqrt{9 - 49x^2}} - 4 \sin x + 9e^{3x} \right) dx,$
10) $\int \frac{-5 \cos^2 x - 4 \sin x \cos x + \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 39

- 1) $\int (-3 + 2x + 5x^2) \ln 4x dx,$ 2) $\int \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{-21 - x^2 + 10x}} dx,$
3) $\int (x - 2) \cos x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 5}{\sqrt{x^2 - 2x - 48}} dx,$
5) $\int \frac{5x^2 - 7x - 8}{(x - 3)(x + 1)^2} dx,$ 6) $\int \frac{-3(7x^2 - 24x - 1)}{(x - 3)(x^2 - 4x + 13)} dx,$
7) $\int 8 \cos 4x e^{\sin 4x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - 2 \sin x}{2 \cos x - 2 \sin x + 2} dx,$

9) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{8}{1 + 16x^2} + 25 \cos 5x \right) dx,$
10) $\int \frac{-3 \cos^2 x + 3 \sin x \cos x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 40

- 1) $\int (-34 - 51x - 15x^2) e^{5x} dx,$ 2) $\int \sqrt{x^2 + 4x + 13} dx,$
3) $\int (-3 - 2x) \operatorname{arcctg} 4x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 10x - 24}} dx,$
5) $\int -\frac{x^2 + 8x - 17}{(x - 5)(x^2 - 1)} dx,$ 6) $\int \frac{2(11x^2 - 16x - 5)}{2(1 - x)(x^2 - 8x + 17)} dx,$
7) $\int 14 \frac{e^{\operatorname{arcctg} 7x}}{1 + 49x^2} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - 3 \sin x}{\cos x - 2 \sin x + 2} dx,$

9) $\int \left(16e^{4x} + \frac{9}{1 + 9x^2} - 4 \sin x \right) dx,$
10) $\int \frac{-3 \cos^2 x - 5 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 41

- 1) $\int (7 - 7x - 8x^2) \ln 9x dx,$ 2) $\int \sqrt{45 - x^2 - 4x} dx,$
3) $\int -(2x - 1) \arcsin 3x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 63}} dx,$
5) $\int -\frac{4x^2 + x - 1}{(x - 1)(x + 1)^2} dx,$ 6) $\int \frac{3(5x^2 - 8x + 37)}{(x - 3)(x^2 + 8x + 25)} dx,$
7) $\int 8 \frac{1}{\sqrt{\operatorname{arcctg} 2x}(1 + 4x^2)} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - \sin x}{3 \cos x - 3 \sin x + 3} dx,$

9) $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{7}{\sqrt{4 - 49x^2}} - 15e^{-5x} \right) dx,$
10) $\int \frac{-3 \cos^2 x - 5 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 42

- 1) $\int (-68 - 28x - 36x^2)e^{-9x} dx,$ 2) $\int \frac{3 - 2x - 2x^2}{\sqrt{x^2 - 10x + 16}} dx,$
3) $\int (3 + 2x) \sin 3x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 2}{\sqrt{-27 + 6x + x^2}} dx,$
5) $\int \frac{5x^2 - 27x + 6}{(x + 2)(x - 3)(x - 6)} dx,$ 6) $\int \frac{(-3x^2 + 6x - 8)}{(x - 3)(x^2 + 2x + 2)} dx,$
7) $\int \frac{-14}{(1 + 49x^2) \operatorname{arctg}(7x)} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + 3 \sin x}{3 \cos x - 2 \sin x + 2} dx,$

9) $\int \left(\frac{-2}{\sqrt{x}} + \frac{56}{16 + 49x^2} - \frac{6}{\sqrt{1 - 9x^2}} \right) dx,$
10) $\int \frac{-5 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + 4 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 43

- 1) $\int (9 + 5x + 5x^2) \ln 7x dx,$ 2) $\int \frac{3 + x - 2x^2}{\sqrt{-x^2 + 4x}} dx,$
3) $\int -(1 - 2x) \sin x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 5}{\sqrt{x^2 + 10x + 41}} dx,$
5) $\int -\frac{2x^2 - 5x - 16}{(x - 2)(x + 1)^2} dx,$ 6) $\int \frac{(35x^2 - 104x + 59)dx}{3(x - 1)(x^2 - 4x + 13)},$
7) $\int -12 \frac{\cos 4x}{\sqrt{\sin 4x}} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + 3 \sin x}{2 \cos x - 2 \sin x + 2} dx,$

9) $\int \left(-9 \cos 3x + \frac{28}{1 + 49x^2} - \frac{6}{\sqrt{1 - 9x^2}} \right) dx,$
10) $\int \frac{-6 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x + 5 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 44

- 1) $\int (11 - 52x - 48x^2) e^{8x} dx,$ 2) $\int \sqrt{x^2 - 6x} dx,$
3) $\int -(2x - 2) \arcsin 5x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 2x + 65}} dx,$
5) $\int \frac{-2(x^2 + 2x - 11)}{(x + 1)(x - 2)(x - 3)} dx,$ 6) $\int \frac{(47x^2 - 8x - 52)dx}{(2 + 3x)(x^2 - 8x + 20)},$
7) $\int \frac{-18}{\sqrt{\arccos 6x} \sqrt{1 - 36x^2}} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + 3 \sin x}{2 \cos x - \sin x + 1} dx,$

9) $\int \left(9 \cos 3x + \frac{5}{x} - \frac{15}{\sqrt{1 - 25x^2}} \right) dx,$
10) $\int \frac{-5 \cos^2 x - 5 \sin x \cos x + 4 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 45

- 1) $\int (3 - 3x - x^2) \ln 9x dx$, 2) $\int \sqrt{-x^2 + 8x} dx$,
3) $\int (2 - 3x) \operatorname{arctg} 5x dx$, 4) $\int \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 4x - 32}} dx$,
5) $\int \frac{2x^2 + 13x - 8}{(x - 3)(x + 4)^2} dx$, 6) $\int \frac{2(11x^2 - 20x - 1)}{(1 - 3x)(x^2 + 4x + 5)} dx$,
7) $\int 3 \frac{\cos 3x}{\sqrt{\sin 3x}} dx$, 8) $\int \frac{\cos x - \sin x}{2 \cos x - 3 \sin x + 3} dx$,
9) $\int \left(16 \sin 4x - \frac{3}{\sqrt{x}} - 15 \cos 3x \right) dx$,
10) $\int \frac{-4 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx$.

Вариант 46

- 1) $\int e^{4x}(-9 + 4x + 16x^2) dx$, 2) $\int \frac{1 - 2x - 3x^2}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}} dx$,
3) $\int (-3 - 2x) \arccos 3x dx$, 4) $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 8x - 33}} dx$,
5) $\int \frac{x^2 - 9x + 6}{(x - 4)(-9 + x^2)} dx$, 6) $\int \frac{2(10x^2 + 11x - 8)}{3(1 - x)(x^2 + 2x + 10)} dx$,
7) $\int \frac{5}{\sqrt{\operatorname{arctg} 5x}(1 + 25x^2)} dx$, 8) $\int \frac{\cos x + 2 \sin x}{3 \cos x - 3 \sin x + 3} dx$,
9) $\int \left(\frac{48}{9 + 16x^2} + \frac{5}{x} - 4 \cos x \right) dx$,
10) $\int \frac{-3 \cos^2 x + 3 \sin x \cos x + 5 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$.

Вариант 47

- 1) $\int (1 + 2x - 9x^2) \ln 5x dx,$ 2) $\int \frac{2 + 2x - 3x^2}{\sqrt{-x^2 - 8x}} dx,$
3) $\int (-3 - 2x) \operatorname{arcctg} 5x dx,$ 4) $\int \frac{3 + 2x}{\sqrt{x^2 - 2x}} dx,$
5) $\int \frac{x^2 - 8x - 86}{(x - 2)(x + 5)^2} dx,$ 6) $\int \frac{(-9x^2 - 16x - 16)}{(x + 2)(x^2 - 4x + 8)} dx,$
7) $\int -27 \frac{\sin 9x}{\sqrt{\cos 9x}} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + 2 \sin x}{2 \cos x - \sin x + 1} dx,$

9) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{x}} - 10 \sin 2x - 2e^{2x} \right) dx,$
10) $\int \frac{-5 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 48

- 1) $\int (-71 - 74x - 72x^2) e^{8x} dx,$ 2) $\int \sqrt{x^2 + 10x + 21} dx,$
3) $\int (2x - 1) \operatorname{arcctg} 5x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 4}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx,$
5) $\int \frac{7x - 5}{(x + 1)(x - 3)} dx,$ 6) $\int \frac{(5x^2 + 22x + 9)}{(1 - 2x)(x^2 + 8x + 17)} dx,$
7) $\int \frac{-48}{\sqrt{1 - 36x^2} \arccos 6x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - 3 \sin x + 3} dx,$

9) $\int \left(-20e^{-4x} + \frac{10}{\sqrt{4 - 25x^2}} - \frac{5}{\sqrt{x}} \right) dx,$
10) $\int \frac{-2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 49

- 1) $\int (-4 - 5x + 7x^2) \ln(9x) dx,$ 2) $\int \sqrt{24 - x^2 - 10x} dx,$
3) $\int (1 - 3x) \cos 3x dx,$ 4) $\int \frac{2x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x - 5}} dx,$
5) $\int \frac{33 + 10x - 3x^2}{(x - 3)(3 + x)^2} dx,$ 6) $\int \frac{(5x^2 - 26x + 9) dx}{(3 - 2x)(x^2 - 6x + 13)},$
7) $\int -\frac{24}{\sqrt{1 - 16x^2} \arcsin 4x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x + 2 \sin x}{2 \cos x - \sin x + 1} dx,$
9) $\int \left(\frac{21}{9 + 49x^2} - 12 \sin 4x + 9e^{3x} \right) dx,$
10) $\int \frac{-5 \cos^2 x + \sin x \cos x + 3 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 50

- 1) $\int (-15 - 15x + 25x^2) e^{5x} dx,$ 2) $\int \frac{1 + x + 2x^2}{\sqrt{x^2 - 8x + 15}} dx,$
3) $\int (-1 - 2x) \cos 3x dx,$ 4) $\int \frac{3 + 2x}{\sqrt{x^2 + 4x}} dx,$
5) $\int \frac{13x - 33}{(3 + x)(1 - x)(x - 6)} dx,$ 6) $\int \frac{(33x^2 + 52x + 24) dx}{2(x + 1)(x^2 + 4x + 8)},$
7) $\int \frac{56}{\sqrt{1 - 49x^2} \arccos 7x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x - 3 \sin x + 3} dx,$
9) $\int \left(12 \sin 4x + 12 \cos 4x - \frac{20}{\sqrt{1 - 16x^2}} \right) dx,$
10) $\int \frac{-5 \cos^2 x - 4 \sin x \cos x + 4 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 51

- 1) $\int (4 - 3x + 9x^2) \ln 6x dx,$ 2) $\int \frac{-3 + 2x - x^2}{\sqrt{-x^2 + 6x}} dx,$
3) $\int -(-1 - 2x) \arcsin 2x dx,$ 4) $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 8x + 17}} dx,$
5) $\int \frac{x^2 + 26x + 98}{(x - 1)(x + 4)^2} dx,$ 6) $\int \frac{(61 - 54x + 13x^2) dx}{3(1 - x)(13 + 6x + x^2)},$
7) $\int \frac{-20}{\sqrt{\arccos 5x} \sqrt{1 - 25x^2}} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - 3 \sin x}{3 \cos x - 3 \sin x + 3} dx,$
9) $\int \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{5}{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \right) dx,$
10) $\int \frac{-3 \cos^2 x + 5 \sin x \cos x + 4 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 52

- 1) $\int (-20 + 2x + 10x^2) e^{-2x} dx,$ 2) $\int \sqrt{x^2 + 8x} dx,$
3) $\int (3 - 3x) \arcsin(x) dx,$ 4) $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{-7 + 6x + x^2}} dx,$
5) $\int \frac{-3(2x^2 - 3x - 13)}{(x - 4)(-9 + x^2)} dx,$ 6) $\int \frac{(-7x^2 - 12x + 21) dx}{(x + 2)(x^2 - 4x + 5)},$
7) $\int \frac{-18}{\sqrt{\operatorname{arcctg} 6x} (1 + 36x^2)} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - 2 \sin x}{3 \cos x - 3 \sin x + 3} dx,$
9) $\int \left(\frac{18}{\sqrt{1 - 36x^2}} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx,$
10) $\int \frac{-4 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 4 \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Вариант 53

- 1) $\int (-7 - 2x + 5x^2) \ln 4x dx$, 2) $\int \sqrt{-24 - x^2 - 10x} dx$,
3) $\int (1 - 2x) \arcsin 5x dx$, 4) $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} dx$,
5) $\int -3 \frac{-18 - x + x^2}{(x - 3)(3 + x)^2} dx$, 6) $\int \frac{2(2x^2 - 5x + 4)}{(x - 1)(x^2 - 2x + 2)} dx$,
7) $\int 4 \cos 2x e^{\sin 2x} dx$, 8) $\int \frac{\cos x + \sin x}{2 \cos x - 3 \sin x + 3} dx$,

9) $\int \left(-\frac{7}{\sqrt{4 - 49x^2}} + \frac{3}{x} - 5 \cos 5x \right) dx$,
10) $\int \frac{-3 \cos^2 x - \sin x \cos x + 4 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx$.

Вариант 54

- 1) $\int (-6x + 20 - 2x^2) e^{-2x} dx$, 2) $\int \frac{-1 + x + x^2}{\sqrt{x^2 - 8x + 15}} dx$,
3) $\int (1 - 2x) \cos x dx$, 4) $\int \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 + 4x + 20}} dx$,
5) $\int \frac{x + 13}{(x + 1)(x - 3)} dx$, 6) $\int \frac{2(5x^2 - 18x - 21)}{(1 + 3x)(x^2 + 8x + 17)} dx$,
7) $\int -32 \sin 4x e^{\cos 4x} dx$, 8) $\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - 2 \sin x + 2} dx$,

9) $\int \left(-6 \sin 2x - \frac{25}{\sqrt{16 - 25x^2}} - \frac{5}{\sqrt{x}} \right) dx$,
10) $\int \frac{-3 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$.

Вариант 55

- 1) $\int (5 - 8x - 3x^2) \ln 6x dx,$ 2) $\int \frac{-2 + 2x - x^2}{\sqrt{-6x - x^2}} dx,$
3) $\int (-1 - 3x) \arccos 4x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 20}} dx,$
5) $\int \frac{8x^2 + x + 3}{(x - 1)(x + 1)^2} dx,$ 6) $\int \frac{x^2 + 4x + 9}{(3 + x)(x^2 + 4x + 5)} dx,$
7) $\int -24 \frac{\cos 3x}{\sin 3x} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - 3 \sin x}{3 \cos x - 3 \sin x + 3} dx,$
9) $\int \left(-6 \sin 3x - \frac{4}{1 + x^2} - 9 \cos 3x \right) dx,$
10) $\int \frac{-5 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + 5 \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} dx.$

Вариант 56

- 1) $\int (-15 + 17x - 12x^2) e^{-3x} dx,$ 2) $\int \sqrt{x^2 + 10x + 16} dx,$
3) $\int (-2 + 3x) \operatorname{arctg} 2x dx,$ 4) $\int \frac{2x - 5}{\sqrt{x^2 + 4x - 60}} dx,$
5) $\int 4 \frac{x^2 - 5x + 2}{(x - 6)(x^2 - 4)} dx,$ 6) $\int -\frac{25x^2 - 32x + 16}{(-2 + 3x)(x^2 - 4x + 8)} dx,$
7) $\int 32 \frac{e^{\operatorname{arctg} 4x}}{1 + 16x^2} dx,$ 8) $\int \frac{\cos x - 3 \sin x}{3 \cos x - 3 \sin x + 3} dx,$
9) $\int \left(\frac{-25}{\sqrt{4 - 25x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{15}{1 + 25x^2} \right) dx,$
10) $\int \frac{-2 \cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx.$

Библиографический список

1. *Пiskунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1975. Т.2.
2. *Кремер Н. Ш. и др.* Высшая математика для экономистов. М.: ЮНИТИ, 2000.
3. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. СПб.: Лань, 1997.
4. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. М.: Наука, 1988. Т.1.
5. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб.пособие. СПб.:Профессия, 2005.
6. *Демидович Б. П.* Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов, М.: Наука, 1997.
7. Сборник задач по математике для втузов / Под ред. *Б. П. Демидовича и А. В. Ефимова* М.: Наука, 1986.

Оглавление

1. Основные понятия	3
2. Таблица основных неопределенных интегралов	3
3. Методы интегрирования	4
3.1. Подведение под знак дифференциала	4
3.2. Вычисление интегралов вида $\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx$ и $\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$	5
3.3. Формула интегрирования по частям	6
3.4. Интегрирование рациональных функций	8
3.5. Интегрирование тригонометрических выражений . .	10
3.6. Метод Остроградского	11
4. Пример выполнения индивидуального задания	13
5. Варианты индивидуальных заданий	19
Библиографический список	47