Н. Н. Писарук

Введение в теорию игр

Минск
2010

Писарук, Н. Н.
Введение в теорию игр / Н. Н. Писарук. — Минск : БГУ, 2010. — 108 с.

В пособии дается краткое и сравнительно элементарное введение в теорию игр. Здесь изучаются бескоалиционные игры в стратегической и позиционной (расширенной) формах, игры с несовершенной информацией, байесовские игры, кооперативные игры. Все изучаемые игровые модели демонстрируются на разнообразных экономических приложениях.

Данный курс предназначен для студентов экономических специальностей университетов. Он предполагает, что студенты владеют основами математического анализа, теории вероятностей, и исследования операций (гладкая оптимизация с ограничениями и линейное программирование). За исключением ряда важных частных примеров, здесь мы вынужденно ограничиваемся изучением конечных игр, поскольку для бесконечных игр поиск равновесия в смешанных стратегиях сводится к решению задач бесконечномерной оптимизации. Несмотря на это, данный курс не есть некий поверхностный пакет лекций, соответствующий типовой программе. В частности, здесь рассматриваются (иногда только на концептуальной основе) почти все игровые модели, за которые их авторы в разное время были удостоены Нобелевской премии в области экономики.

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1 Предмет теории игр

Мы можем записать общую задачу исследования операций следующим образом:

$$\begin{gathered} f(x,y,z) \ \to \ \text{ext} \\ x \in X, \ y \in Y, \ z \in Z, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где

- x — вектор контролируемых факторов,
- y — вектор случайных факторов,
- z — вектор неопределенных факторов.

Значение контролируемых факторов выбирается теми, кто принимает решение (оперирующей стороной). Случайные и неопределенные факторы — это неконтролируемые факторы для оперируюшей стороны. Разница между случайными и неопределенными факторами состоит в следующем. Компоненты вектора y — это случайные величины с известным законом распределения. Например, y_5 есть нормальная случайная величина с параметрами $(0,1)$. В противоположность, оперирующей стороне известны только области значений неопределенных факторов. Например, переменная z_3 принимает значения из отрезка $[1,7]$.

Теория игр изучает задачи исследования операций, в которых присутствуют неопределенные факторы. Существуют разные подходов к решению оптимизационных задач в условиях неопределенности. Характерная особенность игрового подхода в том, что в нем предполагается, что неопределенные факторы принимает наихудшие для оперирующей стороны значения. По этой причине, можно считать, что выбор неопределенных факторов осуществляется противником (даже если такового и нет в реальности) оперирующей стороны. Предположение о том, что неопределенные факторы принимает наихудшие значения также известно как *принцип разумности*

противника — на любые решения оперирующей стороны противник ответит наилучшим для него образом.

Теория игр — это теория принятия решения в условиях неопределенности. Основное применение теории игр — анализ конфликтных ситуаций в экономике и военном деле.

Игра — это модель (конфликтной) ситуации, в которой

- участвует n лиц (игроков);
- заданы правила игры (способ принятия решений каждым из игроков);
- определены правила осуществления платежей — для каждого игрока i ($i = 1, \ldots, n$) задана функция его выигрышей $\phi_i(s^1, \ldots, s^n)$, где s^j — стратегия (решение) j-го игрока ($j = 1, \ldots, n$).

1.2 Классификация игр

Обычно игры классифицируют следующим образом.

- По количеству игроков: игры $1, 2, n$ игроков.
- По количеству стратегий: конечные и бесконечные игры. Если у всех игроков конечное число стратеги, то такая игра *конечная*, иначе — *бесконечная*.
- Па характеру взаимоотношений между игроками: бескоалиционные, коалиционные, кооперативные игры. Игра называется *бескоалиционной*, если игроки не заключают между собой никаких соглашений. В *коалиционной* игре игроки могут заключать соглашения с целью увеличить свои выигрыши. В *кооперативной* игре коалиции определены до начала игры.
- Если сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю, то такая игра есть *игра с нулевой суммой*, Игра двух игроков с нулевой суммой называется *антагонистической*. В такой игре один игрок выигрывает за счет другого, т.е. $\phi_1 = -\phi_2$. В играх *с ненулевой суммой* все игроки в сумме могут получить меньше их суммарного взноса. Например, в лоторее ее организаторы всегда в выигрыше, а участники в сумме получают меньше их суммарного взноса.
- По виду функции выигрышей: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные, дуэльные и т.д.

  Матричная игра — это конечная игра двух игроков с нулевой суммой. Такая игра определяется матрицей $A = [a_{ij}]$ размера $m \times n$ выигрышей первого игрока. Пусть стратегии первого игрока занумерованы числами от 1 до m, а второго — от 1 до n. Тогда элемент a_{ij} равен выигрышу первого игрока при условии, что он использует стратегию

i, а второй игрок — стратегию j. Матрица выигрышей второго игрока — $-A^T$.

Биматричная игра — это конечная бескоалиционная игра двух игроков с ненулевой суммой. Она определяется матрицами A и B размера $m \times n$ выигрышей соответственно первого и второго игроков.

Игра называется *непрерывной*, если функции выигрышей всех игроков непрерывные. Если функции выигрышей выпуклы, то игра называется *выпуклой*. Игра называется *сепарабельной*, если функции выигрышей могут быть представлены в виде: $\phi_i(s^1, \ldots, s^n) = \sum_{j=1}^n \phi_i^j(s^j)$. Игра *типа дуэли* характеризуется моментом выбора хода и зависимостью вероятности выигрыша от времени, прошедшего с начала игры.

- По количеству ходов: *одноходовые* (например, матричные игры) и *многоходовые*. Многоходовые игры делятся на

  a) *позиционные*: несколько игроков паследовательно делают ходы; выигрыши игроков зависят от стратегии выбора ходов (пример — шашки, шахматы, карточные игры, игровые автоматы и т.д.);

  b) *стохастические*: в игре есть ходы, которые делаются случайным образом, и сущуствует вероятность возвращения на предшествующие позиции;

  c) *дифференциальные*: ходы делаются непрерывно и поведения игроков описываются диференциальными уравнениями.

- По информированности игроков: игры с совершенной и несовершенной информацией. В игре с *совершенной информацией* на каждом шаге игрокам известно, какие ходы были сделаны ранее (например, шашки и шахматы). В игре с *несовершенной информацией* игроки могут не знать, в какой позиции они находятся (некоторые стохастические игры, в частности, карточные игры).

  К играм с несовершенной информацией сводятся игры *с неполной информацией* (также известные как *байесовские игры*). В отличие от игр с несовершенной информацией, где неполная информированность игроков возникает в процессе игры, в играх с неполной информацией неполная информированность некоторых игроков возникает еще до начала игры, как следствие ассимметричной информированности игроков (покупатель меньше знает о качестве товара, чем продавец, фирма точно не знает, какую технологию использует ее конкурент, и т. д.).

1.3 Выпуклыя множества и функции

Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми своими двумя точками $x, y \in X$ оно содержит и отрезок

$$[x, y] \stackrel{\text{def}}{=} \{z(\lambda) = (1-\lambda)x + \lambda y \,:\, 0 \le \lambda \le 1\},$$

соединяющий эти точки. Простейшими примерами выпуклых множеств являются *линейное пространство* $\mathbb{R}^n$, *положительный ортант*

$$\mathbb{R}^n_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\},$$

евклидов шар

$$B(x^0, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n :\ \|x - x^0\| \leq r\}$$

и *симплекс*

$$\Sigma_n \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n_+ :\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1\}.$$

Функция f называется *выпуклой*, если для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y). \tag{1.2}$$

Важно отметить, что локальны минимум выпуклой функции на выпуклом множестве является глобальным. Если (1.2) всегда выполняется как строгое неравенство, то функция f называется *строго выпуклой*. Нетрудно убедиться, что строго выпуклая функция f на любом выпуклом множестве X имеет единственный минимум, т.е. существует точка $x^* \in X$, что $f(x^*) < f(x)$ для всех $x \in X$.

Снова, используя формулу Тейлора, можна получить критерий выпуклости гладкой функции.

Теорема 1.1 *Дважды непрерывно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпукла (строго выпукла) тогда и только тогда, когда в любой точке $x \in \mathbb{R}^n$ матрица вторых производных (Гессиан)*

$$\nabla^2 f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_n} \end{bmatrix}.$$

неотрицательно определена (положительно определена).

Квазивыпуклые функции

Функция f называется *квазивыпуклой* (соотв. *квазивогнутой*) на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, если множество $\{x \in X :\ f(x) \leq f(x^0)\}$ (соотв. $\{x \in X :\ f(x) \geq f(x^0)\}$) выпукло при всех $x^0 \in X$.

Теорема 1.2 *Функция $f : X \to \mathbb{R}$, определенная на выпуклом множестве X, квазивыкла, тогда и только тогда, когда для всех $x, y \in X$ и $0 \leq \lambda \leq 0$*

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \max\{f(x), f(y)\}. \tag{1.3}$$

Неравенство (1.3) означает, что значение функции в любой точке отрезка не превышает максимального значение функции на концах отрезка.Это неравенство иногда называют *неравенством Йенсона*.

Для дифференцируемых функций справедливы следующие критерии.

Теорема 1.3 *Непрерывно дифференцируемая функция $f : X \to \mathbb{R}$, определенная на выпуклом множестве X, квазивыкла, тогда и только тогда, когда для всех $x, y \in X$*

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow (\nabla f(x))^T (y - x) \leq 0. \tag{1.4}$$

Если $\nabla f(x) \neq 0$, то неравенство (1.4) означает, что вектор $\nabla f(x)$ является нормалью к касательной гиперплоскости в точке x к множеству $\{y : \ f(y) \leq f(x)\}$. Понятно, что неравенство (1.4) верно и для выпуклых функций. Но между выпуклыми и квазивыпуклыми функциями имеется существенное различие: если f — выпуклая функция и $\nabla f(x) = 0$, то x есть точка глобального минимума функции f; но для квазивыпуклой функции f из $\nabla f(x) = 0$ не следует, что x есть ее точка глобального минимума.

Теорема 1.4 *Дважды непрерывно дифференцируемая функция $f : X \to \mathbb{R}$, определенная на выпуклом множестве X, квазивыкла, тогда и только тогда, когда для всех $x \in X$ и всех $y \in \mathbb{R}^n$*

$$y^T \nabla f(x) = 0 \Rightarrow y^T \nabla^2 f(x) y \geq 0. \tag{1.5}$$

Например, фунция $f(x) = x_1 \cdot x_2$ является квазивогнутой (но не вогнутой) на открытом выпуклом множестве $\mathbb{R}^2_{++}$ и квазивыпуклой (но не выпуклой) на открытом выпуклом множестве $\mathbb{R}_{--}$. Действительно, поскольку для $x \in \mathbb{R}^2_{++}$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

то для любого $y \in \mathbb{R}^2$, такого, что $y^T \nabla f(x) = y_1 x_2 + y_2 x_1 = 0$, имеем $y_1 = -(x_1/x_2) y_2$ и

$$y^T \nabla^2 f(x) y = (y_1, y_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2 y_1 y_2 = -(x_1/x_2) y_2^2 < 0.$$

Поэтому $f(x) = x_1 \cdot x_2$ является квазивогнутой.

1.4 Теорема о неподвижной точке

Неподвижной точкой отображения $f : \ X \to X$ называется точка $x^0 \in X$, такая, что $x^0 = f(x^0)$. Мы знаем, что любая непрерывная функция $f : \ [0, 1] \to [0, 1]$ имеет неподвижную точку (см. рис. 1.1). Ясно, что также имеются отображения, которые не имеют неподвижных точек. Например, отображение $f(x) = -x$ множества $X = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq |x| \leq 2\}$ в себя

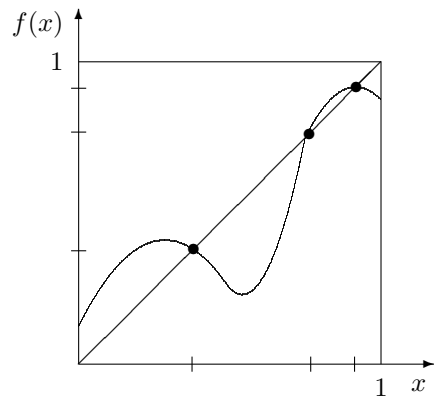


Рис. 1.1: Неподвижные точки непрерывной функции

отображает отрезки $[1,2]$ и $[-2,-1]$ друг на друга. Очевидно, что такое отображение не имеет неподвижной точки.

Многозначное отображение $F : X \to Y$ множества X в множество Y каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие подмножество $F(x)$ множества Y. Например, $X = Y = [0,1]$ и $f(x) = \{y : \ x \le y \le 1\}$. Мы можем рассматривать многозначное отображение F как обычное однозначное отображение множества X в множество 2^Y (множество степень 2^Y множества Y — это множество всех подмножеств множества Y).

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Многозначное отображение $F : X \to Y$ называется *ограниченным*, если существует константа D, такая, что

$$\|y\| \le D \quad \forall\, x \in X,\ y \in F(x).$$

Многозначное отображение $F : X \to Y$ называется *полунепрерывное сверху* в точке $x \in X$, если из условия $x_n \to x, y_n \to y$, $y_n \in F(x_n)$ слудует, что $y \in F(x)$. Отображение называется *полунепрерывным сверху*, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in X$.

Многозначное отображение $F : \ X \to Y$ называют *K-отображением*, если оно удовлетворяет условиям:

а) для всех $x \in X$ множество $F(x)$ не пустое и выпуклое;

б) F — ограничено и полунепрерывно сверху.

Приведем пример важного K-отображения.

Теорема 1.5 *Пусть X и Y — выпуклые компакты и $f(x,y)$ — непрерывная функция, определенная на $X \times Y$, такая, что при каждом $y \in Y$ множество*

$$z(y) \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max_{x \in X} f(x,y) \tag{1.6}$$

выпукло. Тогда отображение $z : \ Y \to X$, определенное по правилу (1.6), является K-отображением.

Доказательство. Действительно, так как X — компакт, то множество $z(y)$ непустое. Покажем, что z полунепрерывно сверху. Пусть $y_n \to y$, $x_n \to x$, $x_n \in z(y_n)$. Тогда

$$f(x_n, y_n) \geq f(\bar{x}, y_n) \quad \forall\, \bar{x} \in X,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Если в этих соотношениях перейти к пределу при $n \to \infty$, то в силу непрерывности f получаем

$$f(x, y) \geq f(\bar{x}, y) \quad \forall \bar{x} \in X,$$

т.е. $x \in z(y)$. □

Следствие 1.1 *Если X, Y — выпуклые компакты, а $f(x, y)$ — непрерывная квазивогнутая по x функция, определенная на $X \times Y$, то отображение z является K-отображением. В этом случае $z(y) = \{x \in X : f(x, y) \geq F(y)\}$, где $F(y) = \max_{x \in X} f(x, y)$.*

Теорема о неподвижной точке является одной из фундаментальных в теории игр и выпуклом анализе. Точка $x \in X$ называется *неподвижной точкой* многозначного отображения $F : X \to X$, если $x \in F(x)$.

Теорема 1.6 (Какутани) [1] *Пусть на (непустом) выпуклом компакте $X \subseteq \mathbb{R}^n$ задано многозначное отображение $F : X \to X$. Если F является K-отображением, то оно имеет неподвижную точку.*

Доказательство этой фундаментальной теоремы нелинейного анализа можно найти книге [4].

1.5 Седловые точки

Седловой точкой функции $f(x, y)$, определенной на множестве $X \times Y$, называется точка (x^0, y^0), которая удовлетворяет условию:

$$f(x, y^0) \leq f(x^0, y^0) \leq f(x^0, y) \quad \forall\, x \in X,\ y \in Y \tag{1.7}$$

Теорема 1.7 (О седловой точке) *Пусть X, Y — выпуклые компакты. Тогда функция $f(x, y)$, определенная и непрерывная на $X \times Y$, квазивогнутая по x на X и квазивыпуклая по y на Y, имеет на $X \times Y$ седловую точку.*

Доказательство. Определим многозначное отображение $g : X \times Y \to X \times Y$ следующим образом: $g(x, y) = u(y) \times v(x)$, где

$$\begin{aligned} u(y) &= \arg\max_{x \in X} f(x, y), \\ v(x) &= \arg\min_{y \in Y} f(x, y). \end{aligned}$$

[1] S. Kakutani. A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem. *Duke Mathematical Journal* **8** (1941) 457–459.

В силу следствия 1.1 отображения u и v являются K-отображениями. Поэтому и $g(x,y)$ — также K-отображение. По теореме 1.6 (Какутани) отображение g имет неподвижную точку $(x^0,y^0) \in g(x^0,y^0)$. Тогда

$$f(x^0,y^0) = \max_{x\in X} f(x,y^0) \quad \text{и} \quad f(x^0,y^0) = \min_{y\in Y} f(x^0,y),$$

или

$$f(x,y^0) \le f(x^0,y^0) \le f(x^0,y), \quad \forall\, x\in X,\ y\in Y.$$

□

Лемма 1.1 *Пусть $f(x,y)$ — действительная функция двух переменных $x\in X$, $y\in Y$ и существуют*

$$\begin{aligned} \alpha &= \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y), \\ \beta &= \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y). \end{aligned}$$

Тогда $\alpha \le \beta$.

Доказательство. Очевидно, что для любых $\bar{x}\in X$ и $\bar{y}\in Y$ справедливы неравенства

$$\min_{y\in Y} f(\bar{x},y) \le f(\bar{x},\bar{y}) \le \max_{x\in X} f(x,\bar{y}).$$

Так как в левой части точка $\bar{x}$ произвольная, то

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \le \max_{x\in X} f(x,\bar{y}).$$

Так как в правой части точка $\bar{y}$ произвольная, то

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \le \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

□

Теорема 1.8 (О совпадении максимина и минимакса) *Пусть для действительной функции $f(x,y), x\in X, y\in Y$ существуют*

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \quad \text{и} \quad \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Тогда

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y) \tag{1.8}$$

тогда и только тогда, когда функция $f(x,y)$ имеет седловую точку. Если (x^0,y^0) — седловая точка функции $f(x,y)$, то

$$f(x^0,y^0) = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y). \tag{1.9}$$

Доказательство. **Достаточность**. Пусть существует седловая точка (x^0, y^0) функции f. Тогда выполняются неравенства

$$f(x, y^0) \le f(x^0, y^0) \le f(x^0, y), \quad \forall x \in X,\ y \in Y.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y) &\le \max_{x\in X} f(x, y^0) \\ &\le f(x^0, y^0) \\ &\le \min_{y\in Y} f(x^0, y) \\ &\le \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y). \end{aligned}$$

По лемме 1.1 наоборот

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \le \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Поэтому

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Необходимость. Пусть выполняется равенство (1.8). Тогда существуют $x^0 \in X$, $y^0 \in Y$, такие, что

$$\begin{aligned} \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) &= \min_{y\in Y} f(x^0, y), \\ \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y) &= \max_{x\in X} f(x, y^0). \end{aligned}$$

Покажем, что (x^0, y^0) — седловая точка функции $f(x, y)$. Из (1.8) следует, что

$$\min_{u\in Y} f(x^0, u) = \max_{v\in X} f(v, y^0).$$

Отсюда для всех $x \in X$ и $y \in Y$ имеем

$$\begin{aligned} f(x, y^0) &\le \max_{v\in X} f(v, y^0) \\ &= \min_{u\in Y} f(x^0, u) \\ &\le f(x^0, y^0) \\ &\le \max_{v\in X} f(v, y^0) \\ &= \min_{u\in Y} f(x^0, u) \\ &\le f(x^0, y). \end{aligned}$$

Кроме того, из этой цепочки неравенств также следует равенство (1.9). □

Глава 2

Бескоалиционные игры

2.1 Равновесие Нэша

Бескоалиционной игрой n игроков называется тройка

$$\gamma = (N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\phi_i\}_{i=1}^n),$$

где $N = \{1, \ldots, n\}$ есть множество игроков, S_i — множество стратегий, а ϕ_i — функция выигрышей i-го игрока.

Набор стратегий игроков $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_i \in S_i$, $i = 1, \ldots, n$, называется *партией* или *ситуацией*. Функции выигрышей игроков определены на множестве ситуаций $S = S_1 \times \cdots \times S_n$.

Обозначим через $s\|\hat{s}_i$ ситуацию, которая получается из ситуации s заменой стратегии s_i игрока i на стратегию $\hat{s}_i$. Ситуация s называется *ситуацией равновесия Нэша*[1][2] в бескоалиционной игре γ, если выполняется следующее условие:

$$\phi_i(s\|\hat{s}_i) \leq \phi_i(s) \quad \forall\, \hat{s}_i \in S_i,\ i = 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Содержательно, неравенства (2.1) означают, что ни одному игроку *в отдельности* не выгодно менять свою стратегию.

Пример 2.1 (азартная игра Нэша) *Два игрока делят сумму денег d. Игрок 1 хочет получить долю x ($0 \leq x \leq d$), а игрок 2 — долю y ($0 \leq y \leq d$). Если $x + y \leq d$, то игрок 1 получит x, а игрок 2 — y. В противном случае, когда $x + y > d$, оба игрока ничего не получат.*

Решение. У нас здесь два игрока $N = \{1, 2\}$. Оба игрока имеют одно и то же множество стратегий $S_1 = S_2 = [0, d]$. В ситуации $(x, y) \in [0, d]^2$ игрок 1 получит

$$\phi_1(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } x + y \leq d, \\ 0, & \text{если } x + y > d, \end{cases}$$

[1] J.F. Nash. Non-cooperative Games. *Annals of Mathematics* **54** (1951) 286–295.

[2] J.F. Nash — Нобелевский лауреат 1994 года в области экономики.

а игрок 2 получит

$$\phi_2(x,y) = \begin{cases} y, & \text{если } x+y \le d, \\ 0, & \text{если } x+y > d. \end{cases}$$

В данной игре $\gamma = (\{1,2\}, \{[0,d],[0,d]\}, \{\phi_1, \phi_2\})$ имеется много ситуаций равновесия Нэша.

1. Все ситуации (x,y), такие, что $x+y=d$. Если любой из игроков захочет увеличить свою долю, то оба игрока ничего не получат. Если какой-либо из игроков уменьшит свою долю, то его выигрыш уменьшится.

2. Ситуация (d,d), когда каждый из игроков хочет получить всю сумму денег. В этой ситуации выигрыши игроков равны нулю. Но это тоже ситуация равновесия, поскольку, если один из игроков требует всю сумму денег, то его оппонент ничего не получит.

□

2.2 Выпуклые игры

Бескоалиционная игра

$$\gamma = (N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\phi_i\}_{i=1}^n)$$

называется *выпуклой игрой*, если для всех $i = 1, \ldots, n$ выполняются условия:

a) S_i — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^{n_i}$;

b) $\phi_i(s)$ — непрерывная на $S = \times_{i=1}^n S_i$ функция;

c) для всех фиксированных значений аргументов $s_j \in S_j$, $j = 1, \ldots, n$, $j \ne i$, $\phi_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$ — квазивогнутая функция переменной s_i.

Теорема 2.1 (Нэша) *Любая выпуклая игра $\gamma = (N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\phi_i\}_{i=1}^n)$ имеет хотя бы одну ситуацию равновесия Нэша.*

Доказательство. Определим многозначное отображение $z : S \to S$ по правилу

$$z(s) = z_1(s) \times z_2(s) \times \cdots \times z_n(s),$$

где отображения $z_i : S \to S_i$ определяются по правилу

$$z_i(s) = \arg\max_{\hat{s}_i \in S_i} \phi(s \| \hat{s}_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что любая стратегия $\bar{s}_i \in z_i(s)$ игрока i является его оптимальным ответом в том случае, если бы он заранее предвидел, что остальные игроки применят свои стратегии $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n$. Теперь условие равновесия (2.1) можно записать в виде $s^* \in z(s^*)$, т.е. ситуации равновесия в игре γ есть неподвижные точки отображения z. В силу следствия 1.1 отображение z является K-отображением и, следовательно, по теореме Какутани 1.6 оно имеет неподвижную точку. □

Теорема 2.1 гарантирует существование решения для выпуклых игр. Рассмотрим теперь итерационный алгоритм решения выпуклой игры

$$\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N}).$$

Итерации процесса естественно интерпретировать как последовательность партий, разыгрываемых игроками. Игроки начинают с некоторой начальной ситуации $s^0 \in S$. На шаге k разыгрывается партия $s^k \in S$ как результат одновременного предъявления всеми игроками своих стратегий s_i^k, т.е. $s^k = (s_1^k, \ldots, s_n^k)$. После того, как партия разыграна, игроки анализируют сложившуюся ситуацию, точнее, они находят свои оптимальные ответы — стратегии $\hat{s}_i^k$, которые им следовало применять, если бы они предвидели заранее ситуацию s^k, т.е.

$$\hat{s}_i^k = \arg\max_{y_i \in S_i} \phi_i(s \| y_i), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Так как $\phi_i(s\|y_i)$ — вогнутая по y_i на S_i функция, то задача (2.2) решается методами выпуклого программирования. С этой новой информацией, игроки корректируют используемые ранее стратегии, вычисляя свои новые стратегии s_i^{k+1} для $(k+1)$-партии следующим образом:

$$s_i^{k+1} = (1 - \lambda_k) s_i^k + \lambda_k \hat{s}_i^k, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Параметр λ_k, который входит в эту формулу, можно интерпретировать как меру осторожности игроков, или их степень доверия новой информации после опыта, накопленного в сыгранных партиях.

Нас интересует вопрос: сходится ли последовательность $s^0, s^1, \ldots, s^k, \ldots$ и, если сходится, то является ли ее предел $s^* = \lim_{k \to \infty} s^k$ ситуаций равновесия?

Если придерживаться слишком консервативной политики, когда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k < \infty,$$

то процес обязательно сойдется, но он может и не дойти до ситуации равновесия s^*. В этом случае факт сходимости можно объяснить утомленостью игроков, их нежеланием или неспособностью далее испытывать свои силы.

С другой стороны, если проявлять чрезмерную склонность к переменам, когда λ_k не стремиться к нулю, то такая «прыть» может привести к тому, что устойчивое состояние так и не будет найдено.

Наиболее простой и естественной политикой при выборе шагов λ_k является политика равного доверия ко всем возникающим в процессе игры оптимальных ответам:

$$\frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} = \frac{1}{k}, \quad \lambda_k = \frac{1}{k+1}.$$

2.3 Олигополии

Одним из основных применений теории игр к экономике является формулировка и анализ моделей олигополии. В этих моделях ограниченное число фирм соперничают на некотором рынке. Поскольку на рынке фирм немного, то они могут сами влиять на цены, что невозможно на рынках с совершенной конкуренцией. Здесь мы рассмотрим простейшую из моделей олигополии.

2.3.1 Однородные продукты: олигополии Курно

Предположим, что на однопродуктовом рынке соперничают m фирм (олигополистов). Предположим, что технология фирмы k такова, что ее затраты на производство y_k единиц продукта равны $g_k(y_k)$. Кроме того, максимальный объем производства на фирме k равен $d_k > 0$.

Предположение 2.1 *Для всех $k = 1, \ldots, m$, функция g_k дважды непрерывно дифференцируема на $[0, d_k]$, $g_k(0) = 0$ и $g_k'(y) > 0$ для всех $y \in [0, d_k]$.*

Предположим, что нам известна *функция потребления* $q = f(p)$; это означает, что при цене продукта $p > 0$, его потребляют в объеме $f(p)$.

Предположение 2.2 *Функция потребления $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ дважды непрерывно дифференцируема и $f'(p) < 0$ для всех $p > 0$. Функция продаж всех фирм $R(p) = pf(p)$ удовлетворяет следующим условиям: $\lim_{p\to 0^+} R(p) = 0$, $\lim_{p\to\infty} R(p) = 0$ (никакой фирме невыгодно назначать нулевую или очень большую цену).*

Поскольку f строго убывающая функция ($f'(p) < 0$), то для нее существует обратная функция $p = f^{-1}(q)$, которая называется *обратной функцией потребления*. Эта функция также дважды непрерывно дифференцируема и строго убывающая (ее первая производная отрицательна).

Чистая прибыль фирмы k равна $\pi_k(p, y_k) = py_k - g_k(y_k)$ при условии, что все произведенное ей удается продать. При выполнении предположений 2.1 и 2.2 каждая из функций π_k дважды непрерывно дифференцируема и $\pi_k(p, 0) = 0$ для всех p, а $\pi_k(0, y_k) \le 0$ для всех y_k.

Набор неотрицательных значений

$$(\hat{p}, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_m)$$

называется *равновесием*, если $\hat{p} > 0$ и выполняется условие освобождения рынка

$$f(\hat{p}) = \sum_{k=1}^{m} \hat{y}_k \,. \tag{2.3}$$

Теорема 2.2 *При выполнении предположений 2.1, 2.2 и, если функции π_k квази-вогнуты по y_k, существует равновесие в модели олигополии с однородными продуктами.*

Доказательство. Мы можем доказать существование равновесия, представив сформулированную модель олигополии как бескоалиционную игру $\gamma = (\{1, \ldots, m\}, \{[0, d_k]_{k=1}^m, \{\phi_k\}_{k=1}^m\})$, где

$$\phi_k(y_1, y_2, \ldots, y_m) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_k\left(f^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m} y_k\right), y_k\right) = f^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m} y_k\right) \cdot y_k - g_k(y_k).$$

В силу сделанных в условии теоремы предположений игра γ есть выпуклая игра. Следовательно, для нее существует ситуация равновесия $\hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_m)$. Определяя $\hat{p} = f^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m} y_k\right)$, мы получим равновесие

$$(\hat{p}, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_m)$$

для модели олигополии. □

Дуополия Курно при линейной функции спроса

Теорема 2.2 гарантирует существование равновесия в модели олигополии, но она не указывает, как его найти. В общем случае поиск равновесия — это не простая задача. В этом параграфе мы рассмотрим простой частный случай данной задачи.

На однопродуктовом рынке конкурируют две фирмы. Предположим, что функция спроса линейная: $q = f(p) = a - bp$, где a и b — положительные числа. Производственные функции обеих фирм также линейны: $g_k(y_k) = c_k y_k$, где $c_k > 0$ есть стоимость производства единицы продукта на фирме $k = 1, 2$. Предположим, что цена определяется так, чтобы уравнять спрос и предложение. Тогда $q = y_1 + y_2$ и обе фирмы продают все, что они производят. Следовательно чистая прибыль фирмы k равна $\pi_k = py_k - c_k y_k$. Обращая функцию спроса, получаем

$$p = \frac{a}{b} - \frac{q}{b} = \frac{a - y_1 - y_2}{b}.$$

Используя это выражение, мы можем выразить чистую прибыль как функцию выпуска:

$$\begin{aligned} \pi_1(y_1, y_2) &= \frac{a - y_1 - y_2}{b}\, y_1 - c_1 y_1 \,, \\ \pi_2(y_1, y_2) &= \frac{a - y_1 - y_2}{b}\, y_2 - c_2 y_2 \,. \end{aligned}$$

Оптимальный выпуск $\hat{y}_k$ (при котором чистая прибыль максимальна) фирмы k должен удовлетворять равенству:

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial y_k} = \frac{a - y_1 - y_2}{b} - \frac{y_k}{b} - c_k = 0, \quad k = 1, 2. \tag{2.4}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае все стационарные точки являются точками максимума, поскольку

$$\frac{\partial^2 \pi_k}{\partial y_k^2} = -\frac{2}{b} < 0.$$

Решая систему (2.4), находим равновесие:

$$\hat{y}_1 = \frac{a + c_2 b - 2c_1 b}{3}, \quad \hat{y}_2 = \frac{a + c_1 b - 2c_2 b}{3}, \quad \hat{p} = \frac{a/b + c_1 + c_2}{3}.$$

Чтобы все эти значения были положительными, параметры дуополии должны удовлетворять неравенствам

$$\frac{a}{b} > 2c_1 - c_2, \quad \frac{a}{b} > 2c_2 - c_1. \tag{2.5}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{a}{b} > \frac{c_1 + c_2}{2}.$$

Это неравенство означает, что средняя цена продукта $(c_1 + c_2)/2$ не может превосходить максимальную цену a/b (при $p = a/b$ выпуск $q = 0$); иначе спрос и предложение никогда не уравновесятся и, следовательно, дуополия не может существовать. Следует также заметить, если выполняется только одно из неравенств (2.5), то только одна наиболее эффективная фирма (та, у которой стоимость производства единицы продукта наименьшая) останется на рынке в качестве монополиста. Кроме того, в любом случае чистый доход более эффективной фирмы всегда больше, чем доход конкурирующей фирмы.

2.3.2 Разнородные продукты: олигополии Бертрана

Как правило, покупатели рассматривают продукты одинакового назначения разных фирм как разные товары. Поэтому логично считать, что на рынок каждая из фирм выходит со своим товаром, причем все эти товары взаимозаменяемы.

Пусть имеется m фирм и пусть p_k есть цена единицы товара фирмы k $(k = 1, \ldots, m)$, а $p = (p_1, \ldots, p_m)$ есть вектор (система) цен. Функция спроса $f_k : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$ системе цен p ставит в соответствие спрос $f_k(p)$ на товар фирмы k. Будем считать, что все f_k обладают следующими свойствами.

Предположение 2.3 *Функция f_k непрерывна, строго убывает по p_k и*

$$\lim_{p_k \to 0^+} f_k(p) = +\infty.$$

Существует p_k^*, такое, что $f_k(p) = 0$ для всех таких p, что $p_k > p_k^*$.

Существование p_k^* обосновывается тем, что при большой цене товара k, потребители перестанут его покупать, предпочитая более дешевые аналоги фирм-конкурентов.

Предположим, что технология фирмы k такова, что ее затраты на производство y_k единиц продукта равны $g_k(y_k)$. Кроме того, максимальный объем производства на фирме k равен $d_k > 0$. Будем также считать, что предположение 2.1 остается в силе.

Набор неотрицательных значений

$$(\hat{p}_1, \hat{y}_1, \hat{p}_2, \hat{y}_2, \ldots, \hat{p}_m, \hat{y}_m)$$

называется *равновесием*, если они образуют решение следующей системы уравнений:

$$y_k = f_k(p_1, \ldots, p_m), \quad k = 1, \ldots, m \tag{2.6}$$

Подставляя выражения для значений y_k в функцию полезности $\pi_k(p, y_k) = py_k - g_k(y_k)$, получим функцию выигрышей фирмы k:

$$\phi_k(p) = p_k\, f_k(p) - g_k(f_k(p)).$$

Теперь мы можем сформулировать задачу поиска равновесия в модели олигополии с разнородными продуктами как задачу поиска ситуации равновесия Нэша в бескоалиционной игре

$$\gamma = \left(\{1, \ldots, m\}, \prod_{k=1}^{m} [0, p_k^*], \{\phi_k\}_{k=1}^{m} \right).$$

Теорема 2.3 *При выполнении предположений 2.1, 2.3 и, если функции π_k квази-вогнуты по p_k, существует равновесие в модели олигополии с разнородными продуктами.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.2. □

Дуополия Бертрана при линейной функции спроса

Пусть имеется две фирмы. Предположим, что функции спроса

$$\begin{aligned} f_1(p_1, p_2) &= a - p_1 + bp_2\,, \\ f_2(p_1, p_2) &= a - p_2 + bp_1 \end{aligned}$$

и функции затрат $g_k(y_k) = cy_k$ $(k = 1, 2)$ линейные. При фиксированной цене p_2 фирма 1 назначает цену p_1, максимизируя свою функцию полезности

$$\pi_1(p_1, p_2) = (a - p_1 + bp_2) \cdot (p_1 - c) \quad \to \quad \max$$
$$0 \le p_1 \le \infty.$$

Аналогично, фирма 2 при фиксированной цене p_1 определяет цену p_2, решая задачу:

$$\pi_2(p_1, p_2) = (a - p_2 + bp_1) \cdot (p_2 - c) \quad \to \quad \max$$
$$0 \le p_2 \le \infty.$$

Поэтому равновесные цены $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_2$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{\partial \pi_1(p_1, p_2)}{\partial p_1} = a + c - 2p_1 + bp_2 = 0,$$
$$\frac{\partial \pi_2(p_1, p_2)}{\partial p_2} = a + c - 2p_2 + bp_1 = 0.$$

Решая эту систему, мы получим

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \frac{a + c}{2 - b}.$$

2.4 Конечные бескоалиционные игры

Пусть в бескоалиционной игре n лиц

$$\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$$

каждый игрок i имеет конечное число стратегий n_i, т.е. $|S_i| = n_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Решениями бескоалиционной игры являются ситуации равновесия. На жаль, большинство бескоалиционных игр не имеет ситуаций равновесия. Чтобы исправить ситуацию, нам нужно некоторым образом расширить понятие стратегии игрока. В дальнейшем стратегии игроков будем называть *чистыми стратегиями*, чтобы отличать их от смешанных стратегий, к рассмотрению которых мы приступаем.

Смешанной стратегией p^i игрока i $(i = 1, \ldots, n)$ в конечной бескоалиционной игре называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий $s_i \in S_i$, т.е.

$$p^i = (p_1^i, p_2^i, \ldots, p_{n_i}^i), \quad p_j^i \ge 0, \quad \sum_{j=1}^{n_i} p_j^i = 1. \tag{2.7}$$

Множество смешанных стратегий $\mathcal{S}_i$ игрока i есть симплекс Σ_{n_i}. Заметим, что смешанная стратегия $\mathrm{e}_j \in \mathcal{S}_i$ игрока i соответствует чистой стратегии

$$s_j^i \in S_i = \{s_1^i, \ldots, s_{n_i}^i\}.$$

В бескоалиционной игре каждый игрок использует свои чистые стратегии независимо от всех остальных игроков, поэтому вероятность $p(s)$ появления ситуации $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ равна произведению вероятностей использования игроками своих чистых стратегий, т.е.

$$p(s) = p(s_1, \ldots, s_n) = p_{s_1}^1 \cdot p_{s_2}^2 \cdot \cdots \cdot p_{s_n}^n, \quad s_i \in S_i, \ i = 1, \ldots, n.$$

Математические ожидания выигрышей игроков в случае, когда они используют свои смешанные стратегии $p^1, p^2, \ldots, p^n$ определяется по формуле

$$\begin{array}{rcl} \bar{\phi}_i(p) & = & \bar{\phi}_i(p^1, p^2, \ldots, p^n) = \sum_{s \in S} \phi_i(s) p(s) \\ & = & \sum_{s_1 \in S_1} \cdots \sum_{s_n \in S_n} \phi_i(s_1, s_2, \ldots, s_n) p^1_{s_1} \cdot \cdots \cdot p^n_{s_n}, \\ & & i = 1, \ldots, n. \end{array} \tag{2.8}$$

Смешанным расширением конечной бескоалиционной игры γ называется бескоалиционная игра

$$\gamma^* = (N, \{\mathcal{S}_i\}_{i \in N}, \{\bar{\phi}_i\}_{i \in N}). \tag{2.9}$$

Ситуацией равновесия игры γ называется ситуация равновесия ее смешанного расширения γ^*.

Так как $\mathcal{S}_i$ есть симплекс, то $\mathcal{S}_i$ — выпуклое множество. Функция $\bar{\phi}_i$ линейна по p^i при фиксированых остальных аргументах

$$p^1, \ldots, p^{i-1}, p^{i+1}, \ldots, p^n.$$

Поэтому γ^* — выпуклая игра, которая по теореме 2.1 имеет ситуацию равновесия.

Теорема 2.4 (Нэш) *Каждая конечная бескоалиционная игра имеет решение в смешанных стратегиях.*

Следующая теорема утверждает, что каждый игрок в случае, когда ему известны стратегии всех остальных игроков, может искать оптимальный ответ среди своих чистых стратегий. Из этото факта следует, что смешанная ситуация является равновесием по Нэшу в смешанных стратегиях, если ни одному игроку в отдельности не выгодно переходить от своей стратегии к какой-либо чистой стратегии.

Теорема 2.5 *Чтобы ситуация $p^0 \in \mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \ldots \mathcal{S}_n$ была ситуацией равновесия в смешанных стратегиях в конечной бескоалиционной игре γ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:*

$$\bar{\phi}_i(p^0 \| \mathrm{e}_j) \leq \bar{\phi}_i(p^0), \quad \mathrm{e}_j \in \Sigma_{n_i},\ i = 1, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Доказательство. По определению p^0 есть ситуация равновесия игры γ^*, если выполняются неравенства

$$\bar{\phi}_i(p^0 \| p^i) \leq \bar{\phi}(p^0), \quad p^i \in \Sigma_i\,,\ i = 1, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Поскольку

$$p^i = p^i_1 \mathrm{e}_1 + p^i_2 \mathrm{e}_2 + \cdots + p^i_{n_i} \mathrm{e}_{n_i},$$

то, сложив неравенства

$$p^i_j \cdot (\bar{\phi}_i(p^0 \| \mathrm{e}_j) \leq \bar{\phi}_i(p^0)), \quad \mathrm{e}_j \in \Sigma_{n_i}\,,$$

получим неравенство

$$\bar{\phi}_i(p^0 \| p^i) \leq \bar{\phi}_i(p^0), \quad p^i \in \Sigma_{n_i}\,.$$

Следовательно, система (2.11) есть следствие системы 2.10. □

2.5 Матричныя игры

Матричная игра задается матрицей A размера $m \times n$ выигрышей первого игрока. Стратегии перого игрока соответствуют строкам, а стратегии второго игрока — столбцам матрицы A. Первый игрок выбирает строку i, а второй — столбец j. В результате первый игрок выигрывает сумму a_{ij}, а второй — $-a_{ij}$.

2.5.1 Равновесие в чистых стратегиях

Решением матричной игры в чистых стратегиях называется пара чистых стратегий (i_0, j_0) первого и второго игроков, которые образуют *седловую точку* матрыцы A:

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}, \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n\,. \tag{2.12}$$

Стратегии i_0, j_0 в этом случае называются *оптимальными чистыми стратегиями*. Из (2.12) следует, что ни одному из игроков в отдельности невыгодно отходить от своей оптимальной стратегии.

По теореме 1.8 (если $X = \{1, \dots, m\}$, $Y = \{1, \dots, n\}$, $f(i,j) = a_{ij}$) матричная игра с матрицей игры A имеет решение в чистых стратегиях тогда и только тогда, когда *нижняя чистая цена игры*

$$\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \le i \le n} \min_{1 \le j \le n} a_{ij}$$

равна *верхней чистой цене игры*

$$\beta(A) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le n} a_{ij}.$$

В таком случае число $\alpha(A) = \beta(A)$ называется *чистой ценой игры*.

Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент, а затем среди этих минимальных элементов выбрать максимальный. Аналогично, чтобы вычислить $\beta(A)$ нужно в каждоv столбце матрицы A найти максимальный элемент, а затем среди этих максимальных элементов выбрать минимальный. Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то отметьте те строки, в которых минимальный элемент равен $\alpha(A)$, и столбцы, в которых максимальный элемент равен $\beta(A)$. Элементы, находящиеся на пересечении отмеченных строк и столбцов, — это все седловые точки матрицы A.

2.5.2 Равновесие в смешаных стратегиях

Мы видели, что не каждая матричная игра имеет решения в чистых стратегиях. Сушествует несколько способов расширыть понятие стратегии с целью получить игру, которая имела бы решение. Наиболее известный из этих способов заключается в следующем. Предполагается, что игра будет повторяться многократно. В силу допущения о разумности противника, принятого в теории игр, нужно допустить, что если игрок использует свои стратегии с некоторой детерминированной закономерностью, то его противник

эту стратегию разгадает. Остается использовать свои стратегги случайным образом, но с определенной закономерностью, поскольку иначе игра превратиться в случайный процесс.

Смешанной стратегией игрока в матричной игре называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий. Певый игрок имеет m стратегий $1, \ldots, m$. Его смешанная стратегия $p = (p_1, \ldots, p_m)$ есть вектор из $\mathbb{R}^m$, который удовлетворяет следующему условию

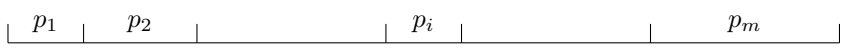
$$\sum_{i}^{m} p_i = 1, \quad p_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m. \tag{2.13}$$

Второй игрок имеет n стратегий $1, \ldots, n$. Его смешанная стратегия $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию

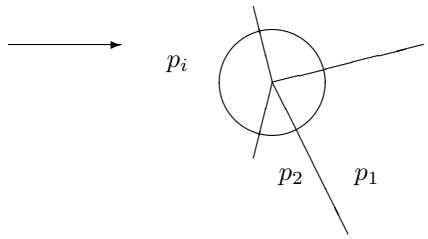
$$\sum_{j}^{n} q_j = 1, \quad q_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n. \tag{2.14}$$

Множество смешанных стратегий первого игрока есть симплекс Σ_m, а второго — симплекс Σ_n. Отметим, что i-ая чистая стратегия игрока 1 соответствует смешанной стратегии $\mathrm{e}_i \in \mathbb{R}^m$, а j-ая чистая стратегия игрока 2 соответствует смешанной стратегии $\mathrm{e}_j \in \mathbb{R}^n$.

Свою смешанную стратегию $p = (p_1, \ldots, p_m)$ игрок 1 может реализовать, например, следующим образом. Разделим отрезок $[0, 1]$ на части длины $p_1, p_2, \ldots, p_m$.



Затем генерируется случайное число $\xi \in [0, 1]$. Если ξ принадлежит i-му отрезку, то в этой партии первый игрок будет использовать i-ю стратегию. Самое простое решение — сделать рулетку, в которой n секторов, i-й сектор размера $p_i \cdot 360^o$; раскрутить колесо рулетки и, после того, как оно остановит, номер сектора, на который указывает указатель рулетки, опрелеляет выбор стратегии игроком.



В качестве *функции выигрышей* в смешанных стратегиях первого игрока в матричной игре с матрицей A рассматривается математическое ожидание его выигрша:

$$E_A(p,q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i\, q_j = p^T A q. \tag{2.15}$$

Решением матричной игры в смешанных стратегиях называется пара смешанных стратегий (p^0, q^0), которая образует седловую точку функции $E_A(p,q)$, т. е.

$$E_A(p,q^0) \le E_A(p^0,q^0) \le E_A(p^0,q) \quad \text{для всех } p \in \Sigma_m,\ q \in \Sigma_n. \tag{2.16}$$

Стратегии p^0, q^0 называются *оптимальными смешанными стратегиями.* Поскольку матричная игра — это конечная бескоалиционная игра, то по теореме 2.4 она имеет решение в смешанных стратегиях. По теореме 1.8 имеет место равенство

$$\max_{p\in\Sigma_m}\min_{q\in\Sigma_n} E_A(p,q) = \min_{q\in\Sigma_n}\max_{p\in\Sigma_m} E_A(p,q) \stackrel{\text{def}}{=} v(A). \tag{2.17}$$

Число $v(A)$ называется *ценой игры.* В качестве оптимальной стратегии первый игрок может выбрать максиминную стратегию

$$p^0 \in \arg\max_{p\in\Sigma_m}\min_{q\in\Sigma_n} E_A(p,q),$$

а второй игрок — минимаксную стратегию

$$q^0 \in \arg\min_{q\in\Sigma_n}\max_{p\in\Sigma_m} E_A(p,q).$$

2.5.3 Графический метод решения матричных игр

Графическим методом решают матричные игры размера $m \times 2$ и $2 \times n$.

Пример 2.2 *Решить графически игру, заданную матрицей*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Предположим, что второй игрок использует свою смешанную стратегию $q = (q_1, q_2) = (q_1, 1-q_1)$, а первый игрок использует свою чистую стратегию i. Тогда средний проигрыш второго (выигрыщ первого) игрока равен

$$g_i(q_1) = q_1\, a_{i1} + (1-q_1)\, a_{i2}.$$

Давайте нарисуем графики функций $y = g_i(q_1)$ (см. рис. 2.1). Для этого на координатной плоскости (q_1, y) удобно провести две вертикальных координатных оси, проходящие через точки $q_1 = 0$ и $q_1 = 1$. Для того, чтобы

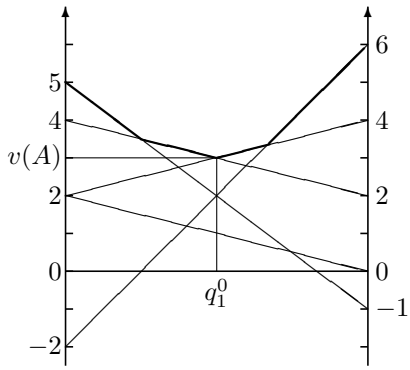


Рис. 2.1: Графическое решение игры размера $m \times 2$

нарисовать график функцию $g_i(q_1)$, нужно соединить точку $(0, a_{i2})$ на первой оси с точкой $(1, a_{i1})$ на второй оси. Другими словами, на первой оси мы откладываем числа из второго столбца матрицы игры, а на второй оси — числа из первого столбца.

Когда все $m = 5$ линий нарисованы, мы можем построить график функции $g(q_1)$ проигрышей второго игрока как верхняю огибающую всех m прямых (на рис. 2.1 изображена жирной линией). Мы видим, что $g(q_1)$ есть кусочно-линейная выпуклая функция. Стремясь минимизировать свой проигрыш, игрок 2 должен найти точку q_1^0 минимума функции $g(q_1)$. Тогда $(q_1^0, 1 - q_1^0)$ есть оптимальная смешанная стратегия второго игрока, а $g(q_1^0)$ есть цена игры. Чтобы точно вычислить точку минимума q_1^0, нужно выделить две *активных стратегии* игрока 1. Эти стратегии определяются по линиям, пересекающимся в точке q_1^0. В нашем примере активными являются стратегии 1 и 4. Следовательно, q_1^0 есть решение уравнения $g_1(q_1) = g_4(q_1)$:

$$4q_1 + 2(1 - q_1) = 2q_1 + 4(1 - q_1).$$

Откуда, $q_1^0 = 1/2$ и $q^0 = (1/2, 1/2)$ есть оптимальная смешанная стратегия игрока 2. Вычислим цену игры как значение g_1 (или g_2) в точке q_1^0: $v(A) = g_1(q_1^0) = 4(1/2) + 2(1/2) = 3$.

Использование неактивных стратегий не может увеличить выигрыш первого (проигрыш второго) игрока. Если игрок 1 откажется от любой своей неактивной стратегии (или сразу от вех неактивных стратегий), то функция проигрышей второго игрока может измениться, но минимум новой функции будет достигаться в той же самой точке q_1^0. Следовательно, ма можем заключить, что первый игрок применяет свои неактивные стратегии с нулевой вероятностью: $p_2^0 = p_3^0 = p_5^0 = 0$. Тогда $p_4^0 = 1 - p_1^0$. Мы найдем p_1^0, решив игру с усеченной матрицей размера 2×2, которая получается из исходной матрицы A после удаления строк, соответствующих неактивным

стратегиям:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Теперь и игрок 1 имеет только две стратегии. Мы можем найти p_1^0 из уравнения (обоснуйте это!):

$$2p_1^0 + 4(1 - p_1^0) = 3 = v(A).$$

Откуда, $p_1^0 = 1/2$ и $p^0 = (1/2, 0, 0, 1/2, 0$ есть оптимальная стратегия игрока 1. □

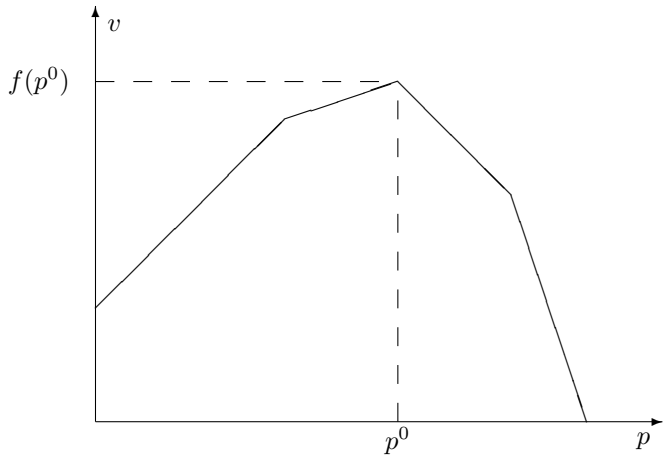
В заключение, скажем несколько слов о решении игр размера $2 \times n$. Во-первых, теперь мы сначала ищем оптимальную стратегию $p^0 = (p_1^0, 1 - p_1^0)$ первого игрока. Для этого мы рисуем n линий: на первой оси откладываем числа из второй строкил матрицы игры, а на второй оси — числа первой строки. Затем строим график функции $f(p_1)$ выигрышей первого игрока как нижнюю огибающую построенного семейства прямых. Находим точку p_1^0 максимума функции $f(p_1)$ и вычисляем цену игры $v(A) = f(p_1^0)$. Активными стратегиями игрока 2 являются те стратегии, которые соответствуют линиям, пересекающимся в точке p_1^0. Выберем любые две активные стратегии и по ним построим усеченную матрицу игры, по которой определим оптимальную стратегию игрока 2.

2.5.4 Сведение матричной игры к задаче ЛП

Если первый игрок выбрал стратегию p и второй игрок это знает, то второй игрок не позволит первому выиграть больше, чем

$$f(p) \stackrel{\text{def}}{=} p \min_{q \in Q} Aq.$$

Функцию $f(p)$ назовем *функцией выигрышей первого игрока.*



Очевидно, что $f(p)$ — вогнутая кусочно-линейная функция. Первый игрок хочет максимизировать свой выигрыш, поэтому он находит свою стратегию, решая задачу

$$\max\{f(p) \,:\, p \in P\} \tag{2.18}$$

Задача (2.18) эквивалентна следующей задаче ЛП, в которой в подграфике функции $f(p)$ ищется точка (v, p) с максимальной координатой v.

$$\begin{array}{rcl} v & \to & \max \\ p^T(Aq) - v & \geq & 0 \quad \text{для всех } q \in Q, \\ p & \in & P. \end{array} \tag{2.19}$$

Так как $q \in \Sigma_n$, то q можно представить как выпуклую комбинацию вершин симплекса: $q = \sum_{j=1}^{n} q_j \, \mathrm{e}_j$. Поэтому неравенство

$$p^T(Aq) - v \geq 0$$

является следствием неравенств

$$p^T A^j - v \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Поэтому задача (2.19) эквивалентна следующей задаче ЛП

$$\begin{array}{rcl} v & \to & \max \\ p^T A^j - v & \geq & 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ p & \in & P, \end{array}$$

или

$$\begin{array}{rcl} v & \to & \max \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, p_i - v & \geq & 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i & = & 1 \\ p_i & \geq & 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{array} \tag{2.20}$$

Функция проигрышей второго игрока имеет вид

$$g(q) = \max_{p \in P} (pA)q$$

и является кусочно-выпуклой. Первый игрок хочет минимизировать свой пройгрыш. Поэтому он находит свою стратегию, решая задачу

$$\min\{g(q) \,:\, q \in Q\}. \tag{2.21}$$

Аналогичным способом можно показать, что задача (2.21), эквивалентна следующей задаче ЛП

$$\begin{aligned} v &\to \min \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, q_j - v &\le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{j=1}^{n} q_j &= 1, \\ q_j &\ge 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Следующая тривиальная лемма позволит нам немного упростить задачи (2.20) и (2.22).

Лемма 2.1 *Пусть матрица A^a получена добавлением к каждому элементу матрицы A числа a ($A^a \stackrel{\text{def}}{=} A + a\mathbf{e}\mathbf{e}^T$). Тогда $E_{A^a}(p,q) = E_A(p,q) + a$ для любых смешанных стратегий p и q.*

Из леммы 2.1 следует, что матричная игра с матрицами A и A^a эквивалентны в том смысле, что они имеют одинаковые оптимальные решения (если такие существуют). Поэтому в дальнейшем, без ограничения общности, будем считать, что

нижняя чистая цена игры положительна, т.е. $\alpha(A) > 0$.

В таком случае переменная v в задачах (2.20) и (2.22) — также положительна. Сделаем следующую замену переменных:

$$y_i = \frac{p_i}{v}, \quad i = 1, \ldots, m; \quad x_j = \frac{q_j}{v}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.23}$$

Так как

$$\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j\,, \tag{2.24}$$

то задачи (2.20) и (2.22) эквивалентны, соответственно, задачам

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} y_i &\to \min \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i &\ge 1, \quad j = 1, \ldots, n, \\ y_i &\ge 0, \quad i = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{2.25}$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_j &\to \max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\le 1, \quad i = 1, \ldots, m, \\ x_j &\ge 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Заметим, что задачи (2.25) и (2.26) двойственны друг другу. Суммируя сказанное выше мы формулируем следующую теорему.

Теорема 2.6 *Решение матричной игры эквивалентно решению пары двойственных задач ЛП.*

Суммируя сказанное выше, мы формулируем

Алгоритм решения матричной игры:

1. Вычисляем нижнюю $\alpha(A)$ и верхнюю $\beta(A)$ чистую цену игры. Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то записываем все ситуации равновесия в чистых стратегиях и заканчиваем. В противном случае ($\alpha(A) < \beta(A)$) переходим к поиску ситуации равновесия в смешанных стратегиях.

2. Если $\alpha(A) \le 0$, то полагаем $a = -\alpha(A) + 1$, в противном случае полагаем $a = 0$. Прибавляем a ко всем элементам матрицы A. Решаем любую (одну) из задач ЛП (2.25) или (2.26) и находим их оптимальные решения x^* и y^*.

3. Вычисляем $\bar{v} = 1/\sum_{j=1}^{n} x_j^* = 1/\sum_{i=1}^{m} y_i^*$, а затем определяем цену исходной игры $v(A) = \bar{v} + a$ и оптимальные стратегии игроков $p^0 = \bar{v} y^*$ и $q^0 = \bar{v} x^*$.

2.5.5 Примеры

Пример 2.3 (Игра полковника Блато) *Армия, которая посылает больше полков на какой то пункт, занимает его и уничтожает все силы противника на этом пункте. Игрок при этом получает единицу за захват пункта и плюс по одной единице за каждый уничтоженный полк противника. Допустим, что имеется два опорных пункта, у Блато есть три полка, а у его противника — два полка.*

Решение Матрица A выигрышей полковника Блато следующая

	(2,0)	(1,1)	(0,2)	
(3,0)	3	1	0	$\underline{0}$
(2,1)	1	2	-1	-1
(1,2)	-1	2	1	-1
(0,3)	0	1	3	$\underline{0}$
	3	$\underline{2}$	3	

Здесь стратегии игроков занумерованы по парами чисел (k, l): k полков послать на пункт 1 и l — на пункт 2.

Так как $\alpha(A) = 0$, $\beta(A) = 2$, то $0 \le v(A) \le 2$. Поэтому к каждому элементу матрицы игры добавим 1 и для полученной матрицы $\bar{A}$ запишем задачу ЛП (2.26):

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &\to \max \\ 4x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 &\le 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad\quad &\le 1, \\ 3x_2 + 2x_3 &\le 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\le 1, \\ x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 &\ \ge 0. \end{aligned}$$

Решим эту задачу симплекс-методом, все симплекс-таблицы в порядке следования приводятся ниже.

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
z	0	1	1	1	0	0	0	0	
x_4	1	4	2	1	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$
x_5	1	2	3	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$
x_6	1	0	3	2	0	0	1	0	—
x_7	1	1	2	4	0	0	0	1	1

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
z	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	1
x_5	$\frac{1}{2}$	0	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	—
x_6	1	0	3	2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$
x_7	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{1}{5}$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
z	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	
x_1	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{4}{15}$	0	0	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{2}$
x_5	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{11}{5}$	0	$-\frac{8}{15}$	1	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{11}$
x_6	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{11}{5}$	0	$\frac{2}{15}$	0	1	$-\frac{8}{15}$	$\frac{3}{11}$
x_3	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	1	$-\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{2}$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
z	$-\frac{5}{11}$	0	0	0	$-\frac{5}{33}$	$-\frac{1}{11}$	0	$-\frac{7}{33}$	
x_1	$\frac{1}{11}$	1	0	0	$\frac{4}{11}$	$-\frac{2}{11}$	0	$-\frac{1}{11}$	
x_2	$\frac{3}{11}$	0	1	0	$-\frac{8}{33}$	$\frac{5}{11}$	0	$\frac{2}{33}$	
x_6	0	0	0	0	$\frac{2}{3}$	-1	1	$-\frac{2}{3}$	
x_3	$\frac{1}{11}$	0	0	1	$\frac{1}{33}$	$-\frac{10}{33}$	0	$\frac{8}{33}$	

Оптимальное решение этой задачи есть вектор $x^0 = (1/11, 3/11, 1/11)$, а решение двойственной задачи — вектор $y^0 = (5/33, 1/11, 0, 7/33)$. Найдем цену игры из условия (2.24):

$$v = v(\bar{A}) = \frac{1}{x_1^0 + x_2^0 + x_3^0} = \frac{1}{1/11 + 3/11 + 1/11} = \frac{11}{5}.$$

Поэтому цена исходной игры равна $v(A) = v(\bar{A}) - 1 = 6/5$. Теперь вычислим оптимальные смешанные стратегии игроков:

$$\begin{aligned} p^0 &= v \cdot y^0 = \frac{11}{5} \cdot \left(\frac{5}{33}, \frac{1}{11}, 0, \frac{7}{33}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, 0, \frac{7}{15}\right) \quad \text{(полковника Блато)}, \\ q^0 &= v \cdot x^0 = \frac{11}{5} \cdot \left(\frac{1}{11}, \frac{3}{11}, \frac{1}{11}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) \quad \text{(противника)}. \end{aligned}$$

Это значит, что, если выбирать в 5 случаях из 15 стратегию (3,0), в 3 из 15 — стратегию (2,1) и в 7 из 15 — стратегию (0,3), то полковник гарантирует себе средний выигрыш 6/5. Заметим также, что p^0 не единственная оптимальная стратегия полковника Блато. В силу симметрии, стратегия $p^* = (7/15, 0, 1/5, 1/3)$ — также оптимальна для Блато. □

Пример 2.4 (Планирование посева) *Фермеру необходимо определить, в каких пропорциях засевать свое поле различными сортами картофеля, если урожайность этих сортов, а, значит, и прибыль, зависят от того, каким будет лето: сухим, дождливым или нормальным. Фермер подсчитал прибыль с 1 га от разных сортов в зависимости от погоды:*

	сухое	*нормальное*	*дождливое*	
сорт 1	2	5	15	*2*
сорт 2	8	12	5	*5*
сорт 3	0	8	10	*0*
	8	*12*	*15*	

Решение. Здесь у фермера нет реального противника. Но, если фермер планирует свою деятельность в расчете на наихудшие погодные условия, то можно считать Природу активным субъектом, который пытается создать наихудшую (с точки зрения фермера) погоду. В таком случае, мы можем смоделировать задачу фермера как матричную игру, в которой фермер является игроком 1, а Природа — игроком 2. Матрица A выигрышей в данной игре — это таблица доходов фермера.

Поскольку нижняя чистая цена данной игры $\alpha(A) = 5$ меньше верхней чистой цены $\beta(A) = 8$, то игра не имеет решения в чистых стратегиях. Решим игру в смешанных стратегияхю У игрока 2 стратегия 1 доминирует стратегию 2, после удаления которой получим следующую усеченную игру:

	сухое	дождливое
сорт 1	2	15
сорт 2	8	5
сорт 3	0	10

Теперь у игрока 1 стратегия 1 доминирует стратегию 3, после удаления которой получим следующую игру размера 2×2:

	сухое	дождливое
сорт 1	2	15
сорт 2	8	5

Значит, оптимальная стратегия игрока 1 (фермера) имеет вид $p^0 = (p_1^0, 1 - p_1^0, 0)$. Найдем p_1^0 из уравнения:

$$2p_1 + 8(1 - p_1) = 15p_1 + 5(1 - p_1).$$

Откуда $p_1^0 = 3/16$ и, следовательно, $p^0 = (3/16, 13/16, 0)$.

Этот пример нам интересен тем, что здесь смешанная стратегия имеет иную, вполне естественную, интерпретацию. Она рекомендует фермеру засеять $3/16$ его поля картофелем сорта 1, а остальную часть $(13/16)$ — картофелем сорта 2. При этом, доход фермера не будет меньшим цены данной игры

$$v(A) = 2p + 8(1 - p) = \frac{2 \cdot 3 + 8 \cdot 13}{16} = \frac{55}{8} = 7\frac{1}{8}.$$

□

Пример 2.5 (Распределение поисковых усилий) *В одном из n-х лесных массивов потерялся человек. Для поиска этого человека имеется k вертолетов. Вероятность обнаружения человека в j-м лесном массиве одним вертолетом равна ω_j. Поэтому r вертолетов обнаружат человека в j-м районе (при условии, что он там находится) с вероятностью*

$$u_j(r) = 1 - (1 - \omega_j)^r.$$

Каким образом нужно распределить вертолеты по лесным массивам, чтобы вероятность обнарудения человека была максимальной.

Пусть $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$.

Решение. Здесь у нас снова нет конфликтной ситуации. Но мы можем планировать поисковую операцию, расчитывая на худшее, когда «злой рок» направил потерявшегося человека в то место, где обнаружить его труднее всего. В таком случае мы можем рассматривать задачу планирования поисковых усилий как матричную игру, в которой игрок 1 — это лицо (или группа лиц), планирующее операцию, а игрок 2 — это «злой рок». Игрок 2 имеет n стратегий, где стратегия $j = 1, \ldots, n$ означает, что человек потерялся в районе j. Стратегии игрока 1 представим вектором $(s_1, \ldots, s_n)$, где $\sum_{j=1}^n s_j = k$ и s_j есть количество вертолетов, посланных в район j.

Для заданных параметров $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$ составим матрицу игры A:

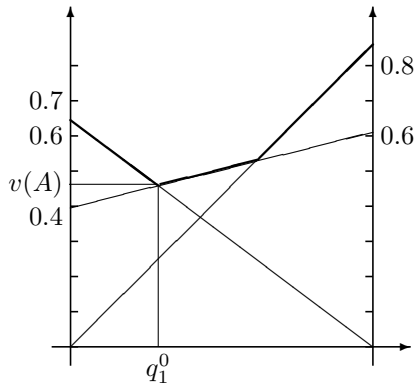


Рис. 2.2: Решение игры » распределение поисковых усилий»

	район 1	район 2	
(2,0)	0.84	0	0
(1,1)	0.6	0.4	$\underline{0.4}$
(0,2)	0	0.64	0
	0.84	$\underline{0.64}$	

Поскольку $\alpha(A) = 0.4 < 0.64 = \beta(A)$, то данная игра не имеет решения в чистых стратегиях. Решение в смешанных стратегиях будем искать графическим методом (см. рис. 2.2). Поскольку активными стратегиями игрока 1 являются стратегии $(1,1)$ и $(0,2)$, то его оптимальная стратегия имеет вид $p^0 = (0, p_2^0, 1 - p_2^0)$. Найдем p_2^0 найдем из уравнения

$$0.6p_2 + 0(1 - p_2) = 0.4p_2 + 0.64(1 - p_2).$$

Откуда $p_2^0 = 16/21$, $p^0 = (0, 16/21, 5/21)$ и $v(A) = 0.6 \cdot (16/21) = 16/35$.

Стратегию p^0 можно реализовать следующим образом: каждый день $16/21$ времени поиска в каждом из районов находится по одному вертолету, а в остальное время два вертолета должны находится во втором районе. □

2.5.6 Упражнения

1. Лиса может спрятаться в одной из пяти лисьих нор. Охотник имеет всего один патрон и может занять одну из четырех позиций A,B,C,D.

$\boxed{1}$ A $\boxed{2}$ B $\boxed{3}$ C $\boxed{4}$ D $\boxed{5}$

Охотник дождется, когда лиса вылезет из норы, и убъет ее, если та находится в смежной от позиции охотника норе. Например, если охотник находится в позиции B, то он убъет лису, если только та нахдится в норах 2 или 3. Выигрыш охотника равен 1, если он убъет лису, и 0 в противном случае.

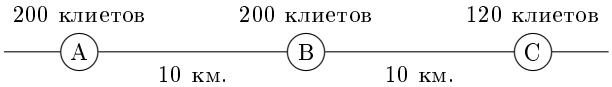
Выигрых лисы равен 0, если она спасется, и -1, если она погибнет. Найдите оптимальные стратегии охотника и лисы.

2. Шерлок Холмс садится в поезд Лондон–Дауер, чтобы уехать на континетн и избежать встречи с профессором Мориарти. Мориарти может затем сесть в экспресс, чтобы догнать Холмса. Но у Холмса есть возможность избежать встречи с Мориарти в Дауере, сойдя на промежуточной станции Кантербери. Естественно и Мориарти знает о такой возможности. Фон Нейман и Моргенштерн оценили выигыши Мориарти следующим образом:

	Кантербери	Дауер
Кантербери	100	-50
Дауер	0	100

Нужно найти оптимальные стратегии Холмса и Мориарти.

3. Две конкурирующие фирмы решили открыть по одному магазину в деревнях A, B и C. Расстояния между деревнями и количесво жителей в них представлены на следующем рисунке.



Каждый клиент будет делать покупки в ближайшем магазине. При одиковом расстоянии до магазинов, клиент будет их посещать с равной частотой. Каждая из фирм стремиться максимизировать число своих клиентов. Где фирмы должны строить магазины?

4.

2.6 Биматричные игры

Конечная бескоалиционная игра двух игроков называется *биматричной игрой*.

Пусть первый игрок имеет m стратегий, а второй — n стратегий. Выйгрыи первого и второго игроков задаются матрицами

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}, \quad B = [b_{ij}]_{m\times n}.$$

Если первый игрок применяет стратегию i, а второй — стратегию j, то первый игрок выигрывает a_{ij}, а второй — b_{ij}.

Пара стратегий (i_0, j_0) является *ситуацией равновесия в чистых стратегиях* в биматричной игре, если выполняются неравенства

$$a_{i_0,j_0} \geq a_{i,j_0}, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$b_{i_0,j_0} \geq a_{i_0,j}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Все ситуации равновесия в чистых стратегиях можно найти способом, который аналогичен способу, которым мы определяли седловые точки матрицы. В каждом столбце матрицы A пометьте звездочкой максимальные элементы. Затем пометьте звездочкой максимальные элементы в каждой строке матрицы B. И наконец, запишите все пары стратегий (i, j), такие, что оба элемента a_{ij} и b_{ij} отмечены звездочкой.

Пример 2.6 (Дилемма бандита) *Два бандита в отдельных камерах ожидают суда по подозрению в тяжком преступлении. Прокурор, имеет доказательства в совершении подозреваемыми незначительного проступка (1 год тюрьмы), предлагает каждому из бандитов признаться в совершении тяжкого преступления. За признание обещено освободить из тюрьмы, но напарник будет осужден к 20 годам тюрьмы. Если признаются оба бандита, то получат по 5 лет тюрьмы.*

Решение. В данной игре два игрока: игрок — это бандит 1, игрока — бандит 2. Их выигрыши представлены в следующей таблице:

	Призн.	Не призн.
Призн.	$-5^*, -5^*$	$0^*, -20$
Не призн.	$-20, 0^*$	$-1, -1$

Ситуация равновесия в этой игре единственная — обоим признаться и получить по пять лет тюрьмы. Отметим, что такой исход не самый лучший для игроков: если оба бандита не признаются, то оба получат всего по одному году заключения. Но такой исход не является ситуацией равновесия, поскольку у каждого из бандитов остается искушение признавшись избежать тюрьмы. □

Сходная ситуация представлена в следующей таблице.

		Фирма 2	
		Сохранение цен	Понижение цен
Фирма 1	Сохранение цен	3,3	1,4
	Понижение цен	4,1	2,2

Две фирмы, конкурирующие на одном рынке, продают свои товары по одинаковой цене. Каждая фирма намеревается снизить цены с целью захвата большей доли рынка и увеличения своей прибыли. Мы видим, что данная ситуация совершенно аналогична дилемме бандита.

Пример 2.7 (Ястребы и голуби) *Если оба Шарон и Арафат будут ястребами (придерживаться воинственной позиции), то они ничего не добьются. Если они будут голубями (придерживаться миролюбивой позиции) их выигрыш оценивается в 2 единицы. Ястреб против голубя выигрывает 3 единицы.*

Решение. Пусть Шарон — это игрок 1, а Арафат — игрок 2. Выигрыши игроков представлены в следующей таблице:

	Ястреб	Голубь
Ястреб	$0, 0$	$3^*, 1^*$
Голубь	$1^*, 3^*$	$2, 2$

Здесь две несравнимые по Паретто ситуации равновесия, в которых один из игроков Ястреб, а другой Голубь. □

Пример 2.8 (Конфликт полов) *Муж и жена собираются вместе провести выходной, муж хотел бы пойти на футбол, а жена — на балет. Кроме того, они предпочитают провести свободное время вместе.*

Решение. Выигрыши игроков (муж — игрок 1, а жена — игрок 2) представлены в следующей таблице:

	Футбол	Балет
Футбол	$2^*, 1^*$	$0, 0$
Балет	$0, 0$	$1^*, 2^*$

В данной игре имеется две чистых ситуации равновесия, когда муж и жена идут вместе либо на футбол, либо на балет. Заметим, то эти ситуации неравноценны для игроков. Позже мы покажем, что в данной игре имеется еще одна ситуация равновесия, но уже в смешанных стратегиях. □

Пример 2.9 (Координация по Паретто) *Если все певцы в хоре поют в одном ключе A, то хор поет прекрасно. Если все поют в ключе B, то хор поет удовлетворительно (в два раза хуже). Но если теноры и сопрано поют в разных ключах, то хор не поет совсем.*

Решение. Выигрыши игроков (теноры — игрок 1, а сопрано — игрок 2) представлены в следующей таблице:

	A	B
A	$2^*, 2^*$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1^*, 1^*$

В данной игре имеется две чистых ситуации равновесия, когда теноры и софрано поют в одном ключе. Причем здесь ситуация (A,A) предпочтительнее для обоих групп певцов и является *оптимальной по Парето*[3]. □

[3] В экономике оптимальным по Парето называется такое распределение доходов индивидуумов, когда не существует друго распределения, которое увеличивает доход хотя бы одного индивидуума, не уменьшая доходы остальных индивидуумов.

Пример 2.10 (Координация) *Если Боб и Сью тренируются по одному (из двух) плану, то они выиграют теннисный турнир смешанных пар. Но если они придерживаются разных тренировочных планов, то они проиграют турнир.*

Решение. Выигрыши игроков (Боб — игрок 1, Сью — игрок 2) представлены в следующей таблице:

	План 1	План 2
План 1	$1^*, 1^*$	$0, 0$
План 2	$0, 0$	$1^*, 1^*$

В данной игре имеется две равноценные ситуации равновесия, когда Боб и Сью придерживаются одного тренировочного плана. □

Пример 2.11 *Поросята Дирк и Сидни живут в одном загоне. Дирк деспот, а Сидни смирная. На одной стене загона прикреплена кнопка. Когда ее нажать, то через отверстие в противоположной стене впрыскивается пища. Если кнопку нажимает Сидни, то Дирк пожирает всю еду и Сидни ничего не остается. Если же кнопку нажимает Дирк, то Сидни успевает поесть, пока Дирк бежит к отверстию. Если ни один из них не нажимает кнопку, то оба остаются голодными. Выигрыши игроков (Дирк — игрок 1, а Сидни — игрок 2) представлены в таблице:*

	Нажимать	*Не нажимать*
Нажимать	$4, 2$	$2^*, 3^*$
Не нажимать	$6^*, -1$	$0^*, 0^*$

Решение. В данной игре имеется одна ситуация равновесия в чистых стратегиях, когда Дирк нажимает кнопку, а Сидни не нажимает. □

2.6.1 Смешанные стратегии

Обычно смешанные стратегии применяют в двух случаях:

1) не существует равносия в чистых стратегиях;

2) смешанная стратегия может доминировать чистые стратегии.

Пусть $p = (p_1, \ldots, p_m)$ — смешанная стратегия первого игрока, $q = (q_1, \ldots, q_n)$ — смешанная стратегия второго игрока. Тогда средний выигрыш первого и второго игроков соответственно равны

$$\begin{aligned} rcl\phi_1(A, p, q) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i\, q_j = p^T A q, \\ \phi_2(B, p, q) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, p_i\, q_j = p^T B q. \end{aligned} \tag{2.27}$$

В силу теоремы 2.5 пара смешанных стратегий (p, q) составляет ситуацию равновесия в биматричной игре тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i\, q_j, \quad i = 1, \dots, m, \\ &\sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, p_i\, q_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Значит для определения ситуации равновесия необходимо решить систему неравенств (2.28) относительно неизвестных p и q при условиях

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad p_i \ge 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ &\sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \quad q_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Теорема 2.7 (Условия дополняющей нежесткости) *Решения (p, q) системы неравенств (2.28) и (2.29) удовлетворяют следующим условиям:*

$$p_i \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i\, q_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{2.30}$$

$$q_j \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, p_i\, q_j - \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.31}$$

Доказательство. Сложим m правых частей (каждая из которых неотрицательна) условия (2.30):

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i\, q_j \right) \sum_{i=1}^{m} p_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i\, q_j - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i\, q_j = 0.$$

Отсюда следует, что и каждое из слагаемых в первой сумме также равно нулю. Это доказывает (2.30). Условие (2.31) доказывается аналогично. □

Долгое время считалось, что решение системы (2.28)–(2.29) — это очень трудная задача, для которой вряд ли будет найден эффективный алгоритм решения. Ситуация изменилась в лучшую сторону, после того как Лемке изобрел свой алгоритм для решения линейной задачи о дополнительности и применил его к решению матричных игр (за эти труды Лемке в 1978 г. получил премию Фон-Неймана). Этот алгоритм мы рассмотрим позже в § 2.6.3.

2.6.2 Уровни безопасности

Независимо от действий второго игрока первый игрок может гарантировать себе средний выигрыш v_I равный цене матричной игры с матрицей A. Аналогично, независимо от действий первого игрока второй игрок может гарантировать себе средний выигрыш v_{II} равный цене матричной игры с матрицей B^T. Здесь мы транспонировали матрицу B^T, поскольку в матричной игре, игрок, который максимизирут свой выигрыш, в качестве своей стратегии выбирает строку матрицы выигрышей. Переходя к матрице B^T, мы меняем игроков местами: игрок 1 в биматричной игре будет игроком 2 в матричной игре, а игрок 2 в биматричной игре будет игроком 1 в матричной игре. Числа v_I и v_{II} называются *уровнями безопасности* игроков.

Пример 2.12 *В игре «конфликт полов» определить уровни безопасности и найти ситуации равновесия в смешанных стратегиях (если такие существуют).*

Решение. Цену игры и оптимальную стратегию $p = (p_1, 1-p_1)$ игрока 1 в матричной игре, заданной матрицей $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, найдем из равенства

$$v_I = 2p_1 + 0(1-p_1) = 0p_1 + 1(1-p_1).$$

Отсюда $p_1 = 1/3$, а $v_I = 2/3$.

Аналогично, цену игры и оптимальную стратегию $q = (q_1, 1-q_1)$ игрока 1 в матричной игре (игрока 2 в биматричной игре), заданной матрицей $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, найдем из равенства

$$v_{II} = 1q_1 + 0(1-q_1) = 0q_1 + 2(1-q_1).$$

Отсюда $q_1 = 2/3$, а $v_{II} = 2/3$.

Как мы видели ранее, в данной игре имеются две ситуации равновесия в чистых стратегиях, когда муж и жена проводят свободное время вместе с выигрышем ≥ 1 для обоих игроков. Пара безопасных стратегий игроков $p = (1/3, 2/3)$ и $q = (2/3, 1/3)$ также образует ситуацию равновесия (вы можете убедиться в этом, проверив выполнимость неравенств (2.28)) с выигрышем равным $2/3$ для обоих игроков. Наличие нескольких ситуаций равновесия с разными выигрышами игроков — одна из проблем теории бескоалиционных игр. □

2.6.3 Сведение к линейноя задаче о дополнительности

Линейная задача о дополнительности обобщает задачи линейного и квадратичного программирования, биматричные игры и еще много других задач.

Пусть M есть квадратная матрица размера n, а вектор $q \in \mathbb{R}^n$. В *линейной задаче о дополнительности* (ЛЗД) нужно найти векторы $w = (w_1, \ldots, w_n)$ и $z = (z_1, \ldots, z_n)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} w - Mz &= q, \\ w^T z &= 0, \\ w, z &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

В силу неотрицательноыти переменных $w_i, z_i \geq 0$, равенство $w^T z = \sum_{i=1}^n w_i z_i = 0$ эквивалентно системе

$$w_i z_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

которая требует, чтобы из каждой *дополнительной пары* переменных (w_i, z_i) хотя бы одна из двух переменных была равна нулю.

Алгоритм Лемке

Задачу (2.32) можно решить симплекс-подобным алгоритмом, предложенным Лемке. Допустимый базис для (2.32), в котором базисной является точно одна переменная из каждой дополняющей пары (w_j, z_j), называется *дополняюще-допустимым*. Алгоритм начинает работу с почти дополняюще-допустимого базиса (это понятие варьируется в зависимости от решаемой задачи) и заканчивает работу, как только будет получен дополняюще-допустимый базис. На каждой итерации, за исключением 1-й, на которой строится начальный почти дополняюще-допустимый базис, вычисления проводятся по следующим правилам:

a) (*правило о дополнительности*) в базис всегда вводится дополнение переменной, покинувшей базис на предыдущей итерации;

b) выбор переменной, покидающей базис, и пересчет таблицы осуществляются по тем же правилам, что и в симплекс-методе.

Решение биматричных игр

Рассмотрим биматричную игру с матрицей A выигрышей 1-го игрока и матрицей B выигрышей 2-го игрока. Обе матрицы размера $m \times n$. Пара смешанных стратегой p первого игрока и q второго игрока образуют ситуацию равновесия Нэша тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\begin{aligned} p^T A q &\geq \mathrm{e}_i^T A q, \quad i = 1, \ldots, m, \\ p^T B q &\geq p^T B \mathrm{e}_j, \quad j = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

или в векторной форме

$$\begin{aligned} Aq &\leq (p^T A q) 1_m\,, \\ B^T p &\leq (p^T B q) 1_n, \end{aligned}$$

где 1_k — это вектор размера k, все компоненты которого равны 1.

Вводя переменные недостатка $s \in \mathbb{R}^m_+$ и $t \in \mathbb{R}^n_+$, перепишем последнюю систему неравенст как систему уравнений

$$\begin{aligned} Aq + s &= (p^T Aq)1_m\,, \\ B^T p + t &= (p^T Bq)1_n. \end{aligned}$$

Предпололжив, что матрицы A и B отрицательны ($a_{ij} < 0$ и $b_{ij} < 0$ для $i = 1, \ldots, m$ и $j = 1, \ldots, n$), разделим последние равенства соответственно на положительные числа $-p^T Aq$ и $-p^T Bq$:

$$\begin{aligned} A\left(\frac{1}{-p^T Aq}\,q\right) + \frac{s}{-p^T Aq} &= -1_m, \\ B^T\left(\frac{1}{-p^T Bq}\,p\right) + \frac{t}{-p^T Bq} &= -1_n. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Вводя новые переменные

$$x = \frac{p}{-p^T Bq}, \quad y = \frac{q}{-p^T Aq}, \quad u = \frac{s}{-p^T Aq}, \quad v = \frac{t}{-p^T Bq},$$

перепишем равенства (2.33) в следующем виде

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_m \\ -1_n \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Условия дополняющей нежесткости $p^T s = 0$ и $q^T t = 0$ в переменных x, y, u, v переписываются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0. \tag{2.35}$$

Задача поиска неотрицательного решения

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0. \tag{2.36}$$

системы (2.34) и (2.35) является линейной задачей о дополнительности.

Пример 2.13 *Решить биматричную игру с матрицами выигрышей игроков*

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Отняв 1 от всех элементов матрицы A и 2 от всех элементов матрицы B, получим

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Запишем ЛЗД, соответствующую биматричной игре с матрицами A и B,

$$\begin{array}{rcl} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \\ u_1x_1 + u_2x_2 + v_1y_1 + v_2y_2 + v_3y_3 & = & 0, \\ u, v, x, y & \geq & 0. \end{array} \tag{2.37}$$

Продемонстрируем работу алгоритма Лемке на примере (2.37). Сначала запишем ограничения в табличной форме.

Базис. перем.	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	q	Отношения
u_1	1	0	0	0	0	0	0	-2	-2	-1	-1	$\frac{1}{2}$
u_2	0	1	0	0	0	0	0	$\boxed{-1}$	-2	-2	-1	1 max
v_1	0	0	1	0	0	$\boxed{-1}$	-2	0	0	0	-1	1 max
v_2	0	0	0	1	0	-3	-1	0	0	0	-1	$\frac{1}{3}$
v_3	0	0	0	0	1	-2	-3	0	0	0	-1	$\frac{1}{2}$

Затем построим начальный почти дополняюще-допустимый базис, который в данном случае должен удовлетворять следующим свойствам: обе переменных точно одной дополняющей пары принадлежат и точно одной пары не принадлежат базису, а для всех остальных пар ровно одна их переменная находится в базисе. Сначала введем в базис переменную x_1, а из базиса выведем переменную v_1, поскольку максимальный ненулевой элемент стобца y_1 находится в третьей строке, соответствующей базисной переменной v_1. Далее, переменная y_1 (дополнение покинувшей базис переменной v_1) должна заменить в базисе переменную u_2.

Базис. перем.	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	q	Отношения
u_1	1	-2	0	0	0	0	0	0	2	3	1	
y_1	0	-1	0	0	0	0	0	1	2	2	1	
x_1	0	0	-1	0	0	1	2	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$
v_2	0	0	-3	1	0	0	$\boxed{5}$	0	0	0	2	$\frac{2}{5}$ min
v_3	0	0	-2	0	1	0	1	0	0	0	1	$\frac{1}{1}$

Теперь вводим в базис переменную y_2 (дополнение u_2), а из базиса выводим v_2.

Базис. перем.	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	q	Отношения
u_1	1	-2	0	0	0	0	0	0	$\boxed{2}$	3	1	$\frac{1}{2}$ min
y_1	0	-1	0	0	0	0	0	1	2	2	1	$\frac{1}{2}$
x_1	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	1	0	0	0	0	$\frac{1}{5}$	
x_2	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	1	0	0	0	$\frac{2}{5}$	
v_3	0	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	0	0	0	0	$\frac{3}{5}$	

Поскольку переменная v_2 покинула базис, то ее дополнение y_2 теперь нужно вводить в базис. Из базиса можно выводить u_1 или y_1. Для разрешения таких неоднозначностей нужно пользоваться лексикографическим правилом. Но мы выведем из базиса u_1, поскольку при таком выборе текущая итерации окажется последней.

Базис. перем.	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	q	Отношения
y_2	$\frac{1}{2}$	-1	0	0	0	0	0	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	
y_1	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	
x_1	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	1	0	0	0	0	$\frac{1}{5}$	
x_2	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	1	0	0	0	$\frac{2}{5}$	
v_3	0	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	0	0	0	0	$\frac{3}{5}$	

Последний базис является дополняюще-допустимым. Поэтому вектор

$$(u_1, u_2; v_1, v_2, v_3; x_1, x_2; y_1, y_2, y_3) = \left(0, 0; 0, 0, \frac{3}{5}; \frac{1}{5}, \frac{2}{5}; 0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

есть решение ЛЗД (2.37). Поскольку $x_1 + x_2 = \frac{3}{5}$ и $y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{2}$, то

$$p = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}\, x = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

и

$$q = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i}\, y = 2\left(0, \frac{1}{2}, 0\right) = (0, 1, 0)$$

образуют пару равновесных стратегий для рассматриваемой игры.

2.6.4 Сведение к задаче целочисленного программирования

Поскольку задача распознавания для биматричной игры[4] является **NP**-трудной, то нельзя надеяться, что алгоритм Лемке будет эффективно решать все примеры биматричной игры. Кроме этого, компьютерные программы, которые решают линейную задачу о дополнительности, все еще

[4] Может ли игрок 1 в биматричной игре с матрицами выигрышей игроков A и B гарантировать себе выигрыш, который не меньше заданной величины δ?

являются экзотикой. В противоположность этому, программы для решения задач смешанно-целочисленного программирования широко распространены, и они постоянно совершенствуются. В этом параграфе мы запишем задачу решения биматричной игры как задачу *смешанно-целочисленного программирования* (СЦП).

Рассмотрим *биматричную игру*, в которой выигрыши первого и второго игроков задаются соответственно матрицами $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Пара векторов $(p, q) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ есть ситуация равновесия Нэша в смешанных стратегиях, если она удовлетворяет системе ограничений (2.28), (2.29).

Исодя из условий дополняющей нежесткости, сформулированных в теореме 2.7, можно доказать, что нелинейная система (2.28), (2.29) эквивалентна следующей смешанно-целочисленной системе неравенств:

$$p_i \le x_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{2.38a}$$

$$v_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le U_1(1 - x_i), \quad i = 1, \dots, m, \tag{2.38b}$$

$$q_j \le y_j, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2.38c}$$

$$v_2 - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \le U_2(1 - y_j), \quad j = 1, \dots, n, \tag{2.38d}$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \tag{2.38e}$$

$$p_i \ge 0,\ x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, \tag{2.38f}$$

$$q_j \ge 0,\ y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2.38g}$$

$$v_1, v_2 \ge 0, \tag{2.38h}$$

где

$$U_1 = \max_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}} a_{ij} - \min_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}} a_{ij}, \qquad U_2 = \max_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}} b_{ij} - \min_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}} b_{ij},$$

а дополнительные переменные имеют следующий смысл:

v_1, v_2 — выигрыши соответственно первого и второго игроков;

$x_i = 1$, если стратегия i игрока 1 является активной (используется с положительной вероятностью $p_i > 0$), и $x_i = 0$ в противном случае;

$y_j = 1$, если стратегия j игрока 2 является активной (используется с положительной вероятностью $q_j > 0$)б и $y_j = 0$ в противном случае.

Самое важное преимущество СЦП-модели в том, что выбором целевой функции мы можем искать равновесие, удовлетворяющее дополнительным требованиям. Например, чтобы найти равновесие, для которого максимален минимальный из выигрышей игроков, нужно ввести еще одну переменную

v и приписать к системе (2.38) следующие целевую функцию и два ограничения:

$$v \to \max,$$
$$v_1 \geq v,\ v_2 \geq v.$$

2.6.5 Упражнения

1. Две конкурирующих сети ресторанов хотят определить свой рекламный бюджет на следующий год. Их суммарный объем продаж равен \$240 млн. Каждая из них может выделить на рекламу от \$6 до \$10 млн. Если одна из сетей тратит на рекламу больше другой, то та, что тратит больше, продаст на \$190. Если обе сети тратят на рекламу поравну, то они и продадут поравну. Продажи на \$1 дают доход \$0.1. Каждая сеть стремится максимизировать свой доход (доход с продаж минус расходы на рекламу). Имеется ли ситуация равновесия, приемлемая для обоих учачтников конфликта?

2. **Microscape против Netsoft** Каждая из фирм теряет 2млн. долларов за период, если они обе продают интернет-браузеры. Когда у фирмы нет соперника, то она, став монополистом, будет зарабатывать \$10 за период. Фирмы могут уйти с рынка в 1996 (с доходом 0) и в 1997 годах, или остаться до конца 1998 года.

		Microscape		
		1996	1997	1998
Net soft	1996	0, 0	0, 10	0, 20
	1997	10, 0	-2, -2	-2, 8
	1998	20, 0	8, -2	-4, -4

Найти все ситуации равновесия (в чистых и смешанных стратегиях).

3. Две компании Pepsi и Coke имеют по автомату в некоторой столовой. Каждой из фирм нужно решить, каким напитком заполнить свой автомат: диетическим, классическим, или обоими. В зависимости от выбранных стратегий доходы фирм следующие:

		Кока-Кола		
		Диет.	Обе	Классич.
Пепси-Кола	Диет.	25, 25	50, 30	50, 20
	Обе	30, 50	15, 15	30, 20
	Классич.	20, 50	20, 30	10, 10

Найти все ситуации равновесия (в чистых и смешанных стратегиях). Как скоординировать стратегии фирм? Указание: сначала покажите, что для обеих фирм стратегия «классическая» является доминируемой.

4. В городе только два бара. Каждый бар может продавать кружку пива за 2, 3 или 4 доллара. 6000 туристов выбирают бар случайным образом и

поэтому половина из них посетит бар 1, а другая — бар 2. 4000 местных жителей идут в бар, где дешевле. При одинаковой цене пива в обоих барах половина местных жителей посетит бар 1, а другая — бар 2. Найдите ситуацию равновесия в биматричной игре, в которой игроками являются два бара.

5. В некоторой фирме сотрудники могут работать прилежно, или бездельничать. Зарплата одного сотрудника равна $1000. Если сотрудник уличен в отлынивании от работы, то его зарплата уменьшается в два раза до $500. Менеджеры могут контролировать сотрудников или не контролировать. Один хорошо работающий сотрудник производит продукции на $2000, а лодырь — только на $500. Стоимость проверки одного сотрудника равна $100. Найдите ситуации равновесия в биматричной игре, в которой игроками являются сотрудники и менеджеры.

6. Вдоль берега равномерно в пунктах A, B, C, D и E расположены пять спасательных станций. Дети могут отдыхать только в тех местах, где имеются спасательные станции. В кажлом из пунктов A, B, C, D и E в течении дня отдыхает по 100 детей, каждый из которых покупает по одному мороженому в день.

Два соперничающих продавца, назовем их Том и Джери, каждое утро в 10 часом катят свои лотки с мороженым в один из пунктов A, B, C, D или E. Дети всегда идут за мороженым к ближайшему продавцу. При равном расстоянии половину детей покупает мороженое у оного продавца, а оставшаяся половина — у другого. Если в каком то пункте имеется лоток с мороженым, то все 100 детей, отдыхающих в этом пункте, купят по одному мороженному. Если в пункте нет лотка, то только половина (50) детей пойдут за мороженным в соседний пункт, и лишь каждый пятый (20) ребенок пойдет за мороженным к лотку, расположенному через один пункт от того места, где он находится. Ни один ребенок не пойдет к лоткам, расположенным далее чем в двух переходах от его места отдыха.

Постройте матрицы выигрышей игроков. Имеются ли ситуации равновесия в чистых стратегиях?

7. Две фирмы арендуют смежные участки земли над резервуаром нефти объемом 100 млн. тонн. Стоимость одной тонны — $200. Каждая из фирм должна решить бурить ли ей скважину и, если бурить, то какого размера? Пробурить и обслуживать более узкую скважину стоит $100 млн., а широкую — $300 млн. Но при этом в день через широкую скважину будет выкачиваться в 3 раза больше нефти.

Постройте матрицы выигрышей игроков (фирм). Имеются ли ситуации равновесия в чистых стратегиях?

Глава 3

Игры в позиционной форме

Позиционные игры — это многоходовые (или динамические) бескоалиционные игры. В позиционной игре ходы делаются в логической последовательности. Каждый ход делается либо одним из игроков (личный ход), либо выбирается случайным образом (случайный ход) в соответствии с заданным распределением вероятностей. В каждой конечной позиции игры задан вектор выигрышей игроков.

3.1 Дерево игры

Формально, *игра в позиционной форме* представляется деревом игры $T = (V, E)$, вершины $v \in V$ которого соответсвуют позициям в игре, а дуги $e \in E$ соответствуют ходам в игре. Корень дерева соответствует начальной позиции игры. Каждый узел, за исключением листьев, помечен одним из чисел $0, 1, \ldots, n$, указывающим номер игрока, который должен делать ход в данной позиции, 0 означает случайный ход. Дугам, выходящих из узла v с меткой 0, приписаны вероятности $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ применения соответствующим им случайных ходов. Листья дерева T — это конечные позиции в игре. Каждому листу t приписан вектор $(\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$ выигрышей игроков, в случае, когда игра заканчивается в данном узле.

Информация в игре задается с помощью информационных множеств. Две позиции принадлежат одному *информационному множеству*, если игрок, который должен делать ход в каждой из этиж позиций данного, не может отличить одну позицию от другой. Из данного определения следует, что из всех узлов одного информационного множества выходит одинаковое число дуг. Позиционная игра называется *игрой с совершенной информацией*, если все информационные множества состоят только их одной позиции.

3.2 Стратегическая форма игры

Стратегия игрока есть план его действий, следуя которому игрок делает ходы на протяжении всей игры. Каждая *стратегия* игрока должна однозначно определять его ход в каждом из принадлежащих ему информационных множеств. Если игрок имеет k информационных множеств, в которых он имеет соответственно $r_1, \ldots, r_k$ ходов, то игрок имеет $n_i = r_1 \cdot \cdots \cdot r_k$ различных стратегий. Пусть S_i обозначает множество всех стратегий игрока i. Набор стратегий игроков $s_i \in S_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ образует *ситуацию* $s = (s_1, \ldots, s_n)$. Каждая ситуация приводит игру к окончанию в некотором множестве $V(s)$ конечных позиций (листьев дерева игры T). Для ситуации s мы можем подсчитать вероятноть $p_t(s)$ окончания игры в позиции (листе) $t \in V(s)$ перемножив все вероятности, приписанные дугам единственного пути из корня дерева в узел t. Средний выигрыш игрока i при использовании ситуации s определяется по формуле:

$$\phi_i(s) = \sum_{t \in V(s)} \phi_i(t) p_t(s).$$

Таким образом, мы получаем бескоалиционную игру n лиц

$$\gamma = (\{1, \ldots, n\}, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\phi_{i=1}^n\}).$$

Игру γ называют *стратегической* или *нормальной формой позиционной игры.*

В качестве *решения позиционной игры* мы можем принять решение ее нормальной формы, т.е., ситуацию равновесия игры γ. Напомним, что ситуация $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $s_i \in S_i$, называется ситуацией равновесия в игре γ, если

$$\phi_i(s) \geq \phi_i(s \| s_i) \; \forall \; s_i \in S_i, \; i = 1, \ldots, n.$$

Пример 3.1 *Рассмотрим очень упрощенный вариант игры в покер. Вначале игры каждый игрок делает единичную ставку. Колода карт, содержащая m красных и n черных карт, тасуется и одна из карт сдается игроку I. Посмотрев на свою карту игрок I может спасовать или поставить некоторую сумму денег a.*
Если игрок I пасует, игра на этом прекращается; игрок I выигрывает ставку (единицу), если у него красная карта, и проигрывает ставку, если у него черная карта. Если игрок I увеличивает ставку, игрок II, не зная карты игрока I, должен решить: пасовать ему или поднимать ставку (объявить игру).
Если игрок II пасует, то игрок I выигрывает ставку (единицу). Если игрок II поднимает ставку, то карты открываются и игрок I выигрывает $1 + a$, если у него красная карта, и проигрывает $1 + a$, если у него черная карта.

Решение. Дерево данной игры представлено на рис. 3.1. Позиции в данной игре обозначены буквами от A до K. Начальная позиция A является

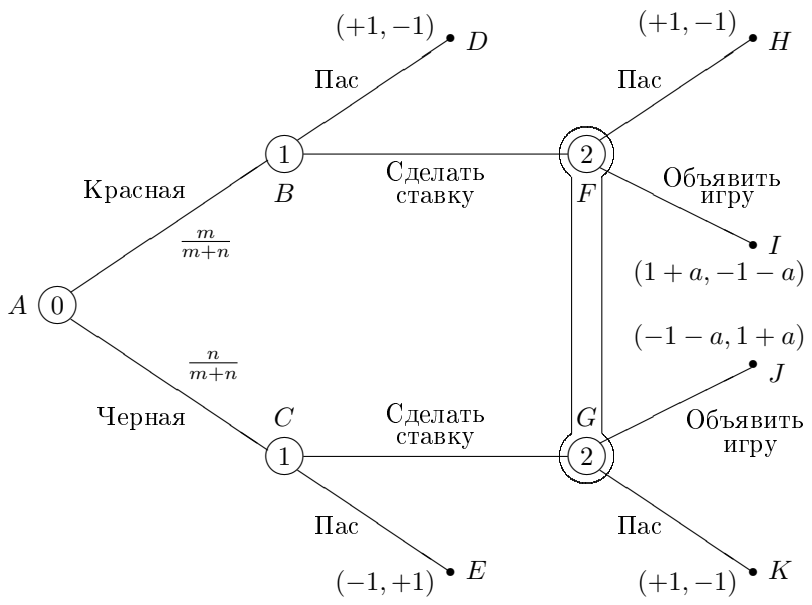


Рис. 3.1: Дерево упрощенного варианта игры в покер

случайной позицией (получение карты из перетасованной колоды). Дугам (A, B) и (B, C) выходящим из этой случайной позиции приписаны вероятности $\frac{m}{m+n}$ и $\frac{n}{m+n}$. В позициях B и C делает ход игрок I, а в позициях F и G — игрок II. В конечных позициях игры H, I, J и K заданы векторы выигрышей игроков.

Игрок I меет два информационных множества $\{B\}$ и $\{C\}$, в каждом по одной позиции. Поскольку для игрока II позиции F и G неразличимы, то у него только одно информационное множество $\{F, G\}$.

Поскольку игрок I имеет два информационных множества и по два выбора (пасовать или сделать ставку) для каждого случая, то он имеет $2 \cdot 2 = 4$ стратегии, которые можно обозначить следующим образом:

ВП = {BF,CG} — всегда поднимать ставку;

ПК = {BF,CE} — поднимать ставку, имея красную карту;

ПЧ = {BD,CG} — поднимать ставку, имея черную карту;

П = {BD,CE} — всегда пасовать.

Игрок II имеет только одно информационное множество и два выбора в каждой позиции этого множества. Следовательно, у него две стратегии:

ПС = {FI,GJ} — поднимать ставку;

П = {FH,GK} — пасовать.

Для каждой пары стратегий игроков можно подсчитать ожидаемые платежи. Например, если игрок I применяет стратегию ВП, а игрок II применяет стратегию ПС, то игрок I выиграет сумму $1 + a$ с вероятностью $p = m/(m+n)$ и с вероятностью $1-p$ сумму $-1-a$. Таким образом, в данной ситуации математическое ожидание выигрыша игрока I равно $(2p-1)(1+a)$. Полная матрица игры имеет следующий вид:

	ПС	П
ВП	$(2p-1)(1+a)$	1
ПК	$2p-1+a\,p$	$2p-1$
ПЧ	$(2p-1)\,a+p-1$	1
П	$2p-1$	$2p-1$

Поскольку исходная игра антагонистическая, то совершенно естественно, что ее стратегическая форма есть матричная игра.

Рассмотрим случай, когда $p = 1/2$ и $a = 1$. Тогда стратегическая форма есть следующая матричная игра:

	ПС	П	
ВП	0	1	$\underline{0}$
ПК	$\frac{1}{2}$	0	$\underline{0}$
ПЧ	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
П	0	0	$\underline{0}$
	$\underline{\frac{1}{2}}$	1	

Поскольку $\alpha = 0 < \frac{1}{2} = \beta$, то данная игра не имеет решения в чистых стратегиях. Оптимальными смешанными стратегиями соответственно первого и второго игроков являются следующие стратегии:

$$p^* = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)^T, \quad q^* = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$$

(проверьте это самостоятельно). Цена игры $v(A) = \frac{1}{3}$. □

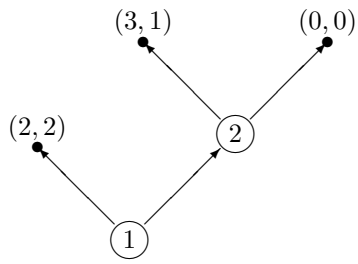
3.3 Игры с совершенной информацией: обратная индукция

Далеко не все позиционные игры имеют ситуации равновесия в чистых стратегиях. Но игры с совершенной информацией (шахматы, шашки и многие другие) всегда имеют ситуации равновесия в чистых стратегиях.

Теорема 3.1 (Куна (также приписывается Zermelo)) [1][2] *Каждая позиционная игра с совершенной информацией имеет ситуацию равновесия*

[1] H.W. Kuhn. Extensive Games and the Problem of Information. In *Contributions to the Theory of Games*, eds. Harold W. Kuhn and A. Tucker, Vol. 2, Princeton University Press, 1953, pp. 193–216.

[2] E. Zermelo. Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematics*, Cambridge Vol. 2: 501, 1912.



	Л	П
Л	$2, 2^*$	$2^*, 2^*$
П	$3^*, 1^*$	$0, 0$

Рис. 3.2: Дерево игры и ее стратегическая форма

в чистых стратегиях.

Доказательство. Доказательство существования ситуации равновесия, как и поиск такой ситуации, осуществляется способом, который называют *методом обратной индукции.* Пусть $\bar{V}$ обоначает множество позиций, для которых векторы выигрышей игроков уже определены. Вначале включаем в $\bar{V}$ все конечные позиции в игре (листья дерева игры). Затем на каждом шаге выбираем такую позицию $v \notin \bar{V}$, что все дуги, выходящие из v, ведут в позиции из множества $\bar{V}$. Игрок, который должен делать ход в позиции v, выбирает свой оптимальный ход (v, w) стремясь максимизировать свой выигрыш. Полагаем вектор выигрышей в позиции v равным вектору выигрышей в позиции w, и добавляем v к $\bar{V}$. Так продолжаем до тех пор, пока не будут вычислены векторы выигрышей для всех позиций. Вектор выигрышей в корне дерева игры и будет вектор выигрышей игроков в данной игре. □

3.3.1 Подигры

Рассмотрим позиционную игру Г, заданную деревом игры T. Любое поддерево дерева T, которое не пересекает информационные множества (все вершины одного информационного множества либо принадлежат поддереву либо не принадлежат) и содержит не менее двух узлов, задает некоторую новую позиционную игру, которую называют *подигрой* исходной игры Г. Ситуация равновесия для игры Г называется *совершенной*[3], если ее сужение на любую из подигр также будет ситуацией равновесия для этой подигры.

Для примера рассмотрим позиционную игру, дерево и стратегическая форма которой представлены на рис. 3.2. Стратегическая форма этой биматричной игры имеет две ситуации равновесия: (Л,П) и (П,Л) (Л — выбрать левое ребро, П — выбрать правое ребро). В этой игре имеется всего одна подигра (не считая всей игры), которая задается поддеревом с корнем в узле с меткой 2. Сужением стратегий (Л,П) и (П,Л) на эту подигру являются стратегии П и Л. Ясно, что оптимальной для второго игрока является

[3] Концепция совершенного равновесия разработал Р. Селтен (R. Selten), Нобелевский лауреат в области экономики 1994 года.

стратегия Л, которая дает ему выигрыш 1, в то время как стратегия П дает ему нулевой выигрыш. Следовательно, из двух расматриваемых стратегий совершенной является только стратегия (П,Л).

Заметим, что мы найдем именно стратегию (П,Л), если применим метод обратной индукции к рассматриваемой позиционной игре. Нетрудно убедиться в том, что метод обратной индукции всегда находит совершенное равновесие.

3.4 Совершенное байесовское равновесие

Поскольку подигра не может пересекать информационные множества, то в играх с несовершенной информацией часто мы будем иметь только одну подигру, совпадающую с исходной игрой, и тогда все равновесия будут совершенными. Чтобы все же исключить нежелательные равновесия в играх с несовершенной информацией была разработана концепция совершенного байесовского равновесия.

Рассмотрим позиционнуцю игру с несовершенной информацией Γ, заданную деревом игры $T = (V, E)$. Пусть в этой игре участвуют n игроков, и пусть $I(v)$ обозначает информационное множество, которому принадлежит позиция $v \in V$. *Система представлений игроков* задается функцией $\mu : V \to [0, 1]$, значения которой интерпретируются как вероятности, приписанные позициям игры, причем, сумма вероятностей, приписанных позициям одного информационного множества, должна быть равна 1. Сужение функции μ на подмножество позиций V_i игрока i, задает *систему представлений игрока* i: если игра достигла некоторого его информационного множества, то игрок полагает, что вероятность того, что он находится в позиции v этого информационного множества, равна $\mu(v)$.

Для заданной системы представлений игроков μ мы можем расширить понятие подигры следующим образом. *Подигра* $\Gamma(I)$, порожденная информационным множеством I, получается добавлением к лесу поддеревьев с корнями в узлах $v \in I$ новой начальной позиции s (корня нового дерева), из которой делается случайный ход, который с вероятностью $\mu(v)$ переведет игру в позицию $v \in I$. Как и ранее, подигра *не должна* пересекать информационные множества.

Пусть γ есть стратегическая форма позиционной игры Γ. Ситуация равновесия Нэша (в смешанных стратегиях) $(p_1^*, \ldots, p_n^*)$ в игре γ называется *совершенным байесовским равновесием* в позиционной игре Γ, если для системы представлений игроков μ, вычисленной по правилу Байеса[4]

$$\mu(v) = \frac{\mathbb{P}(v)}{\sum_{w \in I(v)} \mathbb{P}(w)}, \tag{3.1}$$

сужение ситуации $(p_1^*, \ldots, p_n^*)$ на любую из подигр $\Gamma(I)$ также является ситуацией равновеся для стратегической формы подигры $\Gamma(I)$. Здесь $\mathbb{P}(v)$ обо-

[4] $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.

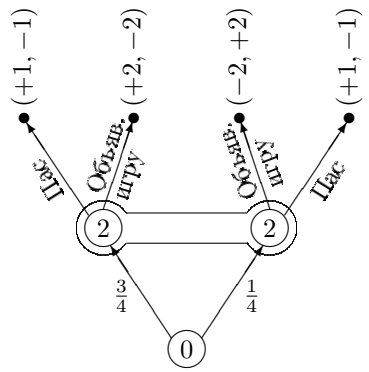


Рис. 3.3: Подигра, определенной по информационному множеству $\{F, G\}$

значает вероятность того, что при использовании ситуации $(p_1^*, \ldots, p_n^*)$ игра достигнет позиции v.

В качестве примера, рассмотрим игру из примера 3.1 (упрощенный вариант игры в покер) при $p = \frac{1}{2}$ и $a = 1$. В данной игре единственная подигра определяется по информационному множеству $\{F, G\}$ игрока 2. При условии, что игрок 1 применяет свою равновесную стратегию $p^* = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)^T$, игра достигнет позиции F с вероятностью $\frac{1}{2}$, а позиции G — с вероятностью $\frac{1}{6}$ (докажите это!). Поэтому

$$\mu(F) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = \frac{3}{4}, \quad \mu(G) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{4}.$$

Дерево подигры, определенной по информационному множеству $\{F, G\}$, представлено на рис. 3.3. В этой подигре любая из стратегий «Пас» или «Объявить игру» дает игроку 2 одинаковый выигрыш -1. Поэтому и любая комбинация этих чистых стратегий, в частности смешанная стратегия $q^* = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$ будет оптимальной для игрока 2.

Замечание 3.1 *В случае, когда в игре имеются информационные множества, которые никогда не достигаются при использовании ситуации $(p_1^*, \ldots, p_n^*)$, мы не можем применить формулу (3.1) (поскольку на ноль делить нельзя). Позициям такого информационного множества можно произвольно приписать любые вероятности $\mu(v)$.*

3.5 Примеры

Пример 3.2 (Microscape против Netsoft) *Фирма Netsoft (игрок 1) разработала новый браузер. Фирма Microscape (игрок 2) может либо оставить вызов без ответа либо попробовать разработать аналогичный продукт. Они могут разработать свой дорогой и медленный браузер, или на-*

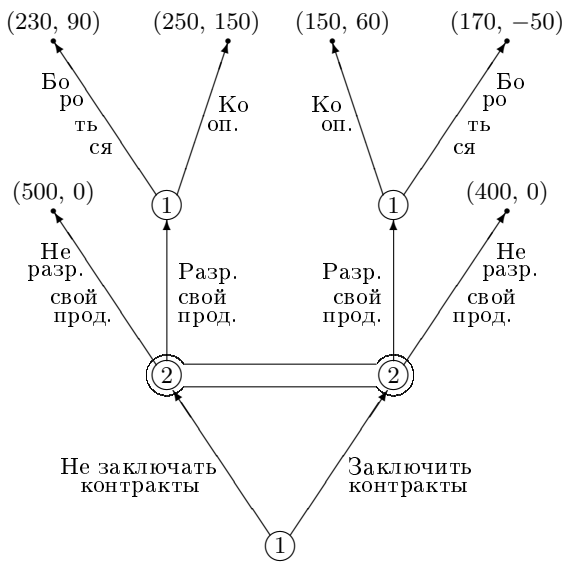


Рис. 3.4: Дерево игры Microscape против Netsoft

нять инженеров Netsoft, чтобы они сделали это. Netsoft может предотвратить это, заключив (дорогие) контракты со своими инженерами, или может ничего не предпринимать. Если Microscape решит разработать свой продукт, Netsoft может бороться с Microscape или разделить с ней рынок. Дерево игры представлено на рис. 3.4. Построить стратегическую форму игры и решить ее.

Решение. У игрока 1 два информационных множеста, в каждой позиции каждого из этих множеств игрок имеет по два хода. Следовательно, игрок I имеет $2 \cdot 2 = 4$ стратегии:

ЗКиБ — заключить контракты и бороться;

ЗКиК — заключить контракты и кооперироваться;

НЗКиБ — не заключать контракты и бороться;

НЗКиК — не заключать контракты и кооперироваться.

У игрока 2 одно информационное множество, в позициях которого игрок 2 имеет по два хода. Поэтому игрок 2 имеет две стратегии:

РБ — разработать свой браузер;

НРБ — не разрабатывать свой браузер.

Стратегическая форма данной игры есть следующая биматричная игра:

	РБ	НРБ
ЗКиБ	$(170, -50)$	$(400, 0^*)$
ЗКиК	$(150, 60^*)$	$(400, 0)$
НЗКиБ	$(230, 90^*)$	$(500^*, 0)$
НЗКиК	$(250^*, 150^*)$	$(500^*, 0)$

Мы видим, что игра имеет одну ситуацию равновесия в чистых стратегиях (НЗКиК,РБ), при реализации которой игрок 1 получит 250, а игрок 2 — 150 единиц. □

3.6 Упражнения

1. Покер Куна[5] — это антагонистическая игра, которая является упрощенным вариантом покера. Игра проходит по следующим правилам:

- Оба игрока делают ставку, равную 1.
- Колода карт, которая содержит только три карты, скажем, короля, даму и валета, тасуется и по одной карте сдается обоим игрокам (третья карта игрокам не показывается).
- Игрок 1 может воздержаться или поднять ставку на 1.
- Если игрок 1 воздержался:
  - Игрок 2 может воздержаться или поднять ставку на 1.
  - Если игрок 2 воздержался, игроки открывают карты и 2 единицы на кону получает тот игрок, у которого более сильная карта.
  - Если игрок 2 поднимает ставку (на кону уже 3 единицы), игрок 1 может спасовать или объявить игру, добавляя на кон еще одну единицу.
  - Если игрок 1 пасует, игрок 2 выигрывае 3 единицы.
  - Если игрок 1 объявляет игру, карты открываются и все 4 единицы на кону получает тот игрок, у которого более сильная карта.
- Если игрок 1 поднял ставку:
  - Игрок 2 может спасовать или объявить игру, добавляя на кон еще одну единицу.
  - Если игрок 2 пасует, игрок 1 выигрывае 3 единицы.
  - Если игрок 1 объявляет игру, карты открываются и все 4 единицы на кону получает тот игрок, у которого более сильная карта.

[5] H.W. Kuhn. Simplified two-person poker. In H.W. Kuhn and A.W. Tucker (editors), Contributions to the Theory of Games, v. 1, pp. 97-103, Princeton University Press, 1950.

2. **PlayBox против X-Station** В начале года производители игровых приставок PlayBox и X-Station должны решить, с какой продукцией выходить на рынок в новом году. У них две альтернативы: 1) разработать принципиально новую модель; 2) модернизировать существующую. Модель должна быть готова к показу на ежегодной выставке электронной продукции. После выставки, производители должны определить цену своей продукции: высокую или низкую. Дерево игры представлено на рис. 3.5. Проведите анализ 4-х подигр, начинающихся в узлах T_1 и T_4. Постройте «усеченное» дерево игры, удалив доминируемые стратегии игроков. Запишите нормальную форму усеченной игры.

3. Дерево этой игры представлено на рис. 3.6. Методом обратной индукции найдите решение. Выгодно ли оно игрокам? При наличии здравого смысла у обоих игроков как им следует поступить?

4. Два игрока (победители лотереи) разыгрывают главный приз следующим образом. Сначала подбрасывается монета. Если выпадает орел, то полагаем $k = 4$, а если выпадает решка, то $k = 5$. В два одинаковых конверта кладутся 10^k и 10^{k+1} долларов. Затем предлагается игроку 1 выбрать один из конвертов, а второй конверт вручают игроку 2. После того, как игроки откроют конверты и увидят свои выигрыши, им предлагают обменяться конвертами. Обмен состоится только тогда, когда оба игрока дают согласие на это. Постройте дерево игры, перейдите к стратегической форме и решите ее, если

a) игроки не знают результата бросания монеты;

b) игроки знают результат бросания монеты.

5. С равной вероятностью *пациент* болен одной из двух болезней. Три эксперта независимо проверяют пациента и ставят диагноз: болезнь 1 или болезнь 2. Каждый из экспертов ставит правильный диагноз с вероятностью $q > 1/2$. Курс лечения назначается по принципу большинства. Все эксперты «хорошие люди» и заинтересованы в том, чтобы увеличить вероятность правильного диагноза.

а) Представьте данную ситуацию как позиционную игру 3-х лиц, $N = \{1, 2, 3\}$, где игроки 1, 2 и 3 — это эксперты, у каждого из которых по две стратегии: определить болезнь 1 или определить болезнь 2. Первый ход в этой игре случайный — приход нового пациента.

б) Найдите все совершенные байесовкие равновесия.

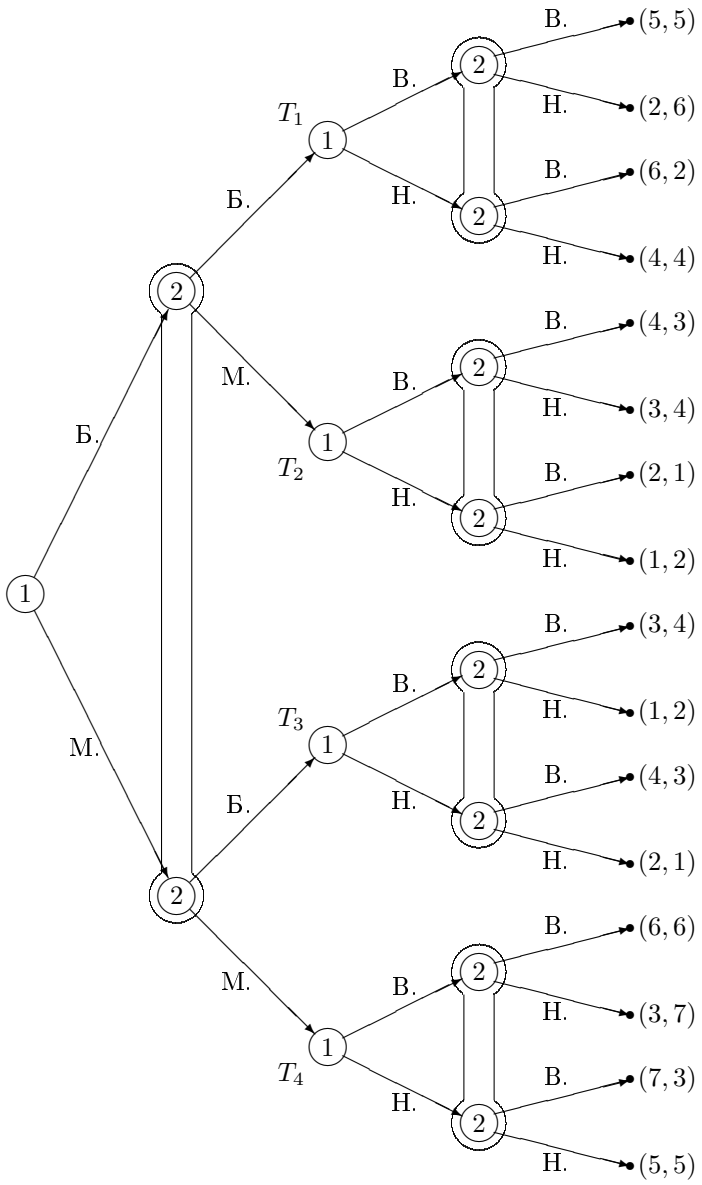


Рис. 3.5: Дерево игры PlayBox против X-Station

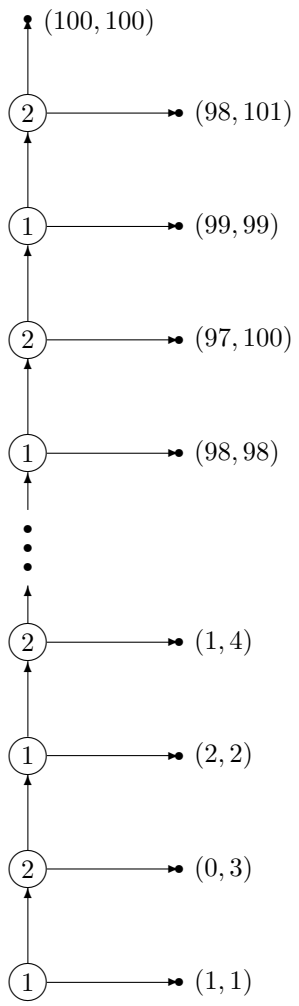


Рис. 3.6: Дерево игры Сороконожка

Глава 4

Игры с неполной информацией (байесовские игры)

Многие важные экономические приложения представляются в виде игры, перед началом которой некоторые игроки скрывают от других игроков важные сведения, знание которых может повлиять на решения других игроков. Такие игры называются *играми с неполной информацией* или *Байесовскими играми*. Эти игры не следует путать с играми с несовершенной информацией, в которых неполная информированность игроков появляется в процессе игры из-за невозможности наблюдать действия других игроков.

Во многих случаях неполная информированность игрока означает, что он не знают точного вида функций выигрышей других игроков. Начнем с примеров.

4.1 Дуополия Курно с неполной информацией

4.1.1 Вариант 1

Давайте вернемся к модели дуополии Курно из § 2.3.1. Но теперь мы предположим, что фирма 1 точно не знает технологии фирмы 2. Фирма 1 полагает, что с вероятностью θ фирма 2 использует старую технологию, для которой стоимость выпуска единицы продукции высокая и равна c_H, и с вероятностью $1-\theta$ фирма 2 использует новую технологию, для которой стоимость выпуска единицы продукции низкая и равна c_L. Другими словами, производственная функция фирмы 1 равна $g_1(y_1) = c_1 y_1$ и фирма 1 полагает, что $g_2(y_2) = c_H y_2$ с вероятностью θ и $g_2(y_2) = c_L y_2$ с вероятностью $1-\theta$. Заметим, что фирма 2 точно знает свою технологию, т.е. она точно

знает свою производственную функцию.

При заданном значении выпуска q_1 фирмы 1, фирма 2 определяет свой выпуск, максимизируя свою функцию чистой прибыли.

Если $g_2(y_2) = c_H y_2$, фирма 2 решает задачу:

$$\phi_2(y_1, y_2; c_H) = \frac{a - y_1 - y_2}{b} y_2 - c_H y_2 \to \max$$
$$y_2 \geq 0.$$

Из условия оптимальности первого порядка

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} = \frac{a - y_1 - 2y_2}{b} - c_H = 0$$

находим оптимальный выпуск

$$y_2(c_H) = \frac{a - y_1 - c_H b}{2} \tag{4.1}$$

фирмы 2.

Аналогично, если $g_2(y_2) = c_L y_2$, фирма 2 решает задачу:

$$\phi_2(y_1, y_2; c_L) = \frac{a - y_1 - y_2}{b} y_2 - c_L y_2 \to \max$$
$$y_2 \geq 0$$

и находит, что ее оптимальный выпуск равен

$$y_2(c_L) = \frac{a - y_1 - c_L b}{2}. \tag{4.2}$$

Средняя чистая прибыль фирмы 1 равна

$$\phi_1(y_1, \theta y_2(c_H) + (1-\theta) y_2(c_L)) = \frac{a - y_1 - \theta y_2(c_H) + (1-\theta) y_2(c_L)}{b} y_1 - c_1 y_1.$$

Оптимальный выпуск фирмы 1 должен удовлетворять условию оптимальности первого порядка

$$\frac{\partial \phi_1(y_1, \theta y_2(c_H) + (1-\theta) y_2(c_L))}{\partial y_1} =$$
$$\frac{a - \theta y_2(c_H) - (1-\theta) y_2(c_L)}{b} - \frac{2}{b} y_1 - c_1 = 0. \tag{4.3}$$

Решая систему уравнений (4.1), (4.2) и (4.3), находим

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{a + (\theta c_H + (1-\theta) c_L - 2c_1) b}{3}, \\
y_2(c_H) &= \frac{a - 2c_H + c_1 b}{3} + \frac{1-\theta}{6}(c_H - c_L) b, \\
y_2(c_L) &= \frac{a - 2c_L + c_1 b}{3} + \frac{\theta}{6}(c_H - c_L) b.
\end{aligned}$$

4.1.2 Вариант 2

Теперь предположим, что производственные издержки обеих фирм могут быть высокими или низкими. В зависимости от этого их производственные функции и функции чистой прибыли (выигрыши) следующие:

- издержки высокие

$$g_i(y_i; c_H) = c_H y_i,$$
$$\phi_i(y_1, y_2; c_H) = \frac{a - y_1 - y_2}{b}\, y_i - c_H y_i;$$

- издержки низкие

$$g_i(y_i; c_L) = c_L y_i,$$
$$\phi_i(y_1, y_2; c_L) = \frac{a - y_1 - y_2}{b}\, y_i - c_L y_i\,.$$

Перед началом производства каждая из фирм точно знает свои издержки на единицу выпуска: c_H или c_L. Но обе фирмы точно не знают издержки конкурента. Представления фирмы об издержках конкурента заданы условными вероятностями:

- $\mu_1(H|H) = \mu_1(c_2 = c_H|c_1 = c_H)$ — вероятность того, что издержки фирмы 2 равны c_H, при условии что издержки фирмы 1 равны c_H;
- $\mu_1(L|H) = \mu_1(c_2 = c_L|c_1 = c_H)$ — вероятность того, что издержки фирмы 2 равны c_L, при условии что издержки фирмы 1 равны c_H;
- $\mu_1(H|L) = \mu_1(c_2 = c_H|c_1 = c_L)$ — вероятность того, что издержки фирмы 2 равны c_H, при условии что издержки фирмы 1 равны c_L;
- $\mu_1(L|L) = \mu_1(c_2 = c_L|c_1 = c_L)$ — вероятность того, что издержки фирмы 2 равны c_L, при условии что издержки фирмы 1 равны c_L;
- $\mu_2(H|H) = \mu_2(c_1 = c_H|c_2 = c_H)$ — вероятность того, что издержки фирмы 1 равны c_H, при условии что издержки фирмы 2 равны c_H;
- $\mu_2(L|H) = \mu_2(c_1 = c_L|c_2 = c_H)$ — вероятность того, что издержки фирмы 1 равны c_L, при условии что издержки фирмы 2 равны c_H;
- $\mu_2(H|L) = \mu_2(c_1 = c_H|c_2 = c_L)$ — вероятность того, что издержки фирмы 1 равны c_H, при условии что издержки фирмы 2 равны c_L;
- $\mu_2(L|L) = \mu_2(c_1 = c_L|c_2 = c_L)$ — вероятность того, что издержки фирмы 1 равны c_L, при условии что издержки фирмы 2 равны c_L.

Например,

$$\mu_1(c_2 = c_H|c_1 = c_H) = \mu_1(c_2 = c_H|c_1 = c_L) = \theta,$$
$$\mu_1(c_2 = c_L|c_2 = c_H) = \mu_1(c_2 = c_L|c_1 = c_L) = 1 - \theta.$$

Выпуск (стратегия) y_i фирмы i есть функция от ее издержек, т.е. $y_i = y_i(c_H)$ или $y_i = y_i(c_L)$. Если $c_1 = c_H$, фирма 1 определяет свою среднюю чистую прибыль $y_1(c_H)$ (выигрыш), как оптимальное решение следующей задачи

$$\begin{gathered}\phi_1(y_1, \mu_1(H|H)y_2(c_H) + \mu_1(L|H)y_2(c_L); c_H) = \\ \frac{a - y_1 - \mu_1(H|H)y_2(c_H) - \mu_1(L|H)y_2(c_L)}{b} y_1 - c_H y_1 \to \max \\ y_1 \geq 0.\end{gathered} \tag{4.4}$$

Если $c_1 = c_L$, то $y_1(c_L)$ есть оптимальное решение задачи

$$\begin{gathered}\phi_1(y_1, \mu_1(H|L)y_2(c_H) + \mu_1(L|L)y_2(c_L); c_L) = \\ \frac{a - y_1 - \mu_1(H|L)y_2(c_H) - \mu_1(L|L)y_2(c_L)}{b} y_1 - c_L y_1 \to \max \\ y_1 \geq 0.\end{gathered} \tag{4.5}$$

Аналогично, если $c_2 = c_H$, то $y_2(c_H)$ есть решение задачи

$$\begin{gathered}\phi_2(\mu_2(H|H)y_1(c_H) + \mu_2(L|H)y_1(c_L), y_2; c_H) = \\ \frac{a - \mu_2(H|H)y_1(c_H) - \mu_2(L|H)y_1(c_L) - y_2}{b} y_2 - c_H y_2 \to \max \\ y_2 \geq 0,\end{gathered} \tag{4.6}$$

а если $c_2 = c_L$, то $y_2(c_L)$ есть решение задачи

$$\begin{gathered}\phi_2(\mu_2(H|L)y_1(c_H) - \mu_2(L|L)y_1(c_L), y_2; c_L) = \\ \frac{a - \mu_2(H|L)y_1(c_H) - \mu_2(L|L)y_1(C_L) - y_2}{b} y_2 - c_L y_2 \to \max \\ y_2 \geq 0.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Записывая условия оптимальности первого порядка для задач (4.4)–(4.7), получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}
y_1(c_H) &= \frac{1}{2}(a - \mu_1(H|H)y_2(c_H) - \mu_1(L|H)y_2(c_L) - c_H b), \\
y_1(c_L) &= \frac{1}{2}(a - \mu_1(H|L)y_2(c_H) - \mu_1(L|L)y_2(c_L) - c_L b), \\
y_2(c_H) &= \frac{1}{2}(a - \mu_2(H|H)y_1(c_H) - \mu_2(L|H)y_1(c_L) - c_H b), \\
y_2(c_L) &= \frac{1}{2}(a - \mu_2(H|L)y_1(c_H) - \mu_2(L|L)y_2(c_L) - c_L b),
\end{aligned}$$

решая которую мы найдем оптимальные выпуски (стратегии) $y_1(c_H), y_1(c_L)$, $y_2(c_H)$ и $y_2(c_L)$ обеих фирм.

4.2 Байесовские игры

Байесовская игра задается четверкой

$$G = (N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{T_i\}_{i=1}^n, \{\phi_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i\}_{i=1}^n)\,,$$

где

- $N = \{1, \ldots, n\}$ — множество игроков;
- S_i — множество стратегий игрока i, $i = 1, \ldots, n$;
- T_i — множество типов игрока i, $i = 1, \ldots, n$;
- $\phi_i : \prod_{j=1}^n S_j \times T_i \to \mathbb{R}$ — функция выигрышей игрока i, $i = 1, \ldots, n$;
- $\mu_i : \prod_{j=1}^n T_j \to [0, 1]$ — представление игрока i о типах других игроков, $i = 1, \ldots, n$.

Тип игрока представляет информацию, известную самому игроку, но неизвестную другим игрокам. Теперь выбор стратегии игрока зависит от его типа, т.е. стратегия $s_i \in S_i$ игрока i есть функция его типа $t_i \in T_i$: $s_i = s_i(t_i)$. Например, в рассмотренной нами модели дуополии Курно мы можем определить типы и стратегии игроков так: $T_1 = \{c_H, c_L\}$, $T_2 = \{c_H, c_L\}$, $y_1(c_H)$, $y_1(c_L)$, $y_2(c_H)$, $y_2(c_L)$.

Выигрыш игрока i зависит от выбранных игроками стратегий, а также от типа игрока i. Если сложилась ситуация $s = (s_1, \ldots, s_n)$ и реальный тип игрока i равен t_i ($t_i \in T_i$), то игрок i выигрывает сумму $\phi_i(s_1, \ldots, s_n; t_i)$. Например, выигрыш игрока i (фирмы i) в модели дуополии Курно равен

$$\begin{aligned}
\phi_i(y_1, y_2; c_H) &= \frac{a - y_1 - y_2}{b}\, y_i - c_H y_i\,, \\
\phi_i(y_1, y_2; c_L) &= \frac{a - y_1 - y_2}{b}\, y_i - c_L y_i\,.
\end{aligned}$$

Представление игрока i о типах других игроков есть условная вероятность

$$\mu_i(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n | t_i) \tag{4.8}$$

того, что типы других игроков соответственно равны $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n$, если тип самого игрока i равен t_i. Удобно ввести обозначения

$$\begin{aligned}
t_{-i} &\stackrel{\text{def}}{=} (t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n), \\
T_{-i} &\stackrel{\text{def}}{=} T_1 \times \cdots \times T_{i-1} \times T_{i+1} \times \cdots \times T_n,
\end{aligned}$$

и записывать условную вероятность (4.8) следующим образом: $\mu_i(t_{-i}|t_i)$.

Для примера, вспомним, что $\mu_1(c_2 = c_L | c_1 = c_H) = \mu_1(L|H)$ есть вероятность того, что издержки фирмы 2 равны c_L, при условии что издержки фирмы 1 равны c_H.

4.2.1 Байесовское равновесие Нэша

Рассмотрим байесовскую игру

$$G = (N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{T_i\}_{i=1}^n, \{\phi_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i\}_{i=1}^n)\,.$$

Байесовской стратегией игрока i называется функция $\tilde{s}_i : T_i \to S_i$[1] Как и для обычных бескоолиционных игр, набор байесовских стратегий называем *ситуацией*. Предположим, что все множества T_i конечные. Ситуация $(\tilde{s}_1^*, \ldots, \tilde{s}_n^*)$ называется *байесовским равновесием Нэша*, если для каждого игрока i и каждого его типа $t_i \in T_i$ стратегия $\tilde{s}_i^*$ является решением следующей оптимизационной задачи

$$\max_{s_i \in S_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} \phi_i(\tilde{s}_1^*(t_1), \ldots, \tilde{s}_{i-1}^*(t_{i-1}), s_i, \tilde{s}_{i+1}^*(t_{i+1}), \ldots, \tilde{s}_n^*(t_n); t_i) \cdot \mu_i(t_{-i}|t_i),$$

в которой ищется оптимальный ответ игрока i на сложившуюся ситуацию.

В частности, в байесовской игре двух лиц

$$G = (\{1,2\}, \{S_1, S_2\}, \{T_1, T_2\}, \{\phi_1, \phi_2\}, \{\mu_1, \mu_2\})$$

пара байесовских стратегий $(\tilde{s}_1^*, \tilde{s}_2^*)$ образует байесовское равновесие Нэша, если

- для каждого типа $t_1 \in T_1$ игрока 1

$$\tilde{s}_1^*(t_1) \in \arg\max_{s_1 \in S_1} \sum_{t_2 \in T_2} \phi_1(s_1, \tilde{s}_2^*(t_2); t_1) \cdot \mu_1(t_2|t_1)$$

- и для каждого типа $t_2 \in T_2$ игрока 2

$$\tilde{s}_2^*(t_2) \in \arg\max_{s_2 \in S_2} \sum_{t_1 \in T_1} \phi_2(\tilde{s}_1^*(t_1), s_2; t_2) \cdot \mu_2(t_1|t_2).$$

Если байесовская игра *конечная* (все множества T_i и S_i конечные), то смешанная стратегия игрока $i \in N$ определяется как векторная функция $\tilde{p}_i : T_i \to \Sigma^{S_i}$, где для $t \in T_i$ вектор $\tilde{p}_i(t) = (\tilde{p}_{i1}(t), \ldots, \tilde{p}_{i,|S_i|}(t))$ задает распределение вероятностей на множестве S_i (чистых) стратегий игрока i. Смешанная байесовская ситуация $(\tilde{p}_1^*, \ldots, \tilde{p}_n^*)$ является *байесовским равновесием в смешанных стратегиях*, если для каждого игрока i и каждого его типа $t_i \in T_i$ смешанная байесовская стратегия $\tilde{p}_i^*(t_i)$ является оптимальным ответом игрока i на сложившуюся ситуацию:

$$\tilde{p}_i^*(t_i) \in \arg\max_{p_i \in \Sigma^{S_i}} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} \sum_{s \in \prod_{j=1}^n S_j} \phi_i(s; t_i) \cdot \mu_i(t_{-i}|t_i) \times$$
$$\tilde{p}_{1,s_1}^*(t_1) \ldots \tilde{p}_{i-1,s_{i-1}}^*(t_{i-1})\, p_{i,s_i}\, \tilde{p}_{i+1,s_{i+1}}^*(t_{i+1}) \ldots \tilde{p}_{n,s_n}^*(t_n).$$

[1] Здесь и далее в этой главе для удобства байесовские стратегии помены знаком «$\sim$».

4.3 Аукционы

Первую формализацию аукционов предложил Нобелевский лауреат в области экономики 1996 года В. Викрей (W. Vickrey). В этом параграфе мы не собираемся изучать теорию аукционов, а лишь рассмотрим два конкретных примера для демонстрации концепции байесовского равновесия.

4.3.1 Аукционы первой цены

На аукционе продается один объект. Два покупателя, 1-й и 2-й, одновременно объявляют суммы b_1 и b_2, которые они согласны заплатить за данный объект. Выигрывает (покупает объект за объявленную цену) тот покупатель, который назначил более высокую цену. В случае равенства цен, $b_1 = b_2$, победитель определяется подбрасыванием монеты.

Покупатель i имеет свою оценку $v_i \in [0,1]$ стоимости продаваемого объекта, $i = 1, 2$. Величины v_1 и v_2 не зависят одна от другой. Функции выигрышей покупателей (игроков) следующие:

$$\phi_1(b_1, b_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - b_1, & \text{если } b_1 > b_2, \\ \frac{1}{2}(v_1 - b_1), & \text{если } b_1 = b_2, \\ 0, & \text{если } b_1 < b_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(b_1, b_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - b_2, & \text{если } b_2 > b_1, \\ \frac{1}{2}(v_2 - b_2), & \text{если } b_2 = b_1, \\ 0, & \text{если } b_2 < b_1. \end{cases}$$

Итак, мы имеем байесовскую игру двух лиц, в которой $S_1 = S_2 = [0, \infty)$, $T_1 = T_2 = [0, 1]$, причем, игрок 2 ничего не знает о v_1 и поэтому полагает, что v_1 есть равномерно распределенная на $[0, 1]$ случайная величина, а игрок 1 также ничего не знает о v_2 и поэтому полагает, что v_2 есть равномерно распределенная на $[0, 1]$ случайная величина. Байесовская стратегия игрока i есть функция $\tilde{b}_i : T_i \to S_i$: если покупатель i оценивает объект в $v_i \in T_i$, то на аукционе он объявляет цену $\tilde{b}_i(v_i)$.

Для заданного $v_1 \in [0, 1]$ игрок 1 определяет стратегию $\tilde{b}_1(v_1)$, решая следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{b_1 \geq 0} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > \tilde{b}_2(v_2)) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 = \tilde{b}_2(v_2)) \right). \tag{4.9}$$

В свою очередь, для заданного $v_2 \in [0, 1]$ игрок 2 определяет стратегию $b_2(v_2)$, решая следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{b_2 \geq 0} \left((v_2 - b_2)\mathbb{P}(b_2 > \tilde{b}_1(v_1)) + \frac{1}{2}(v_2 - b_2)\mathbb{P}(b_2 = \tilde{b}_1(v_1)) \right). \tag{4.10}$$

Из определения функций выигрышей видно, что каждый из покупателей может выиграть положительную сумму только тогда, когда он назначает цену, которая меньше его оценки продаваемого объекта. Покажем, что

каждому из покупателей на аукционе нужно объявлять цену объекта равной половине его личной оценки данного объекта. Формально, это означает, что пара $(\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2, \tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2)$ является байесовским рановесием в данной игре.

Мы найдем наилучший ответ игрока 1 на байесовскую стратегию $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$ игрока 2, подставляя в (4.9) значение $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$ и затем решая следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{b_1 \geq 0} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > v_2/2) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 = v_2/2) \right) =$$
$$\max_{b_1 \geq 0} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(v_2 < 2b_1) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(v_2 = 2b_1) \right) =$$
$$\max_{b_1 \geq 0} \left((v_1 - b_1)2b_1 \right).$$

Из условия оптимальности первого порядка

$$2v_1 - 4b_1 = 0$$

находим $\tilde{b}_1^*(v_1) = \frac{1}{2}v_1$.

Следовательно, для каждого $v_1 \in [0, 1]$, стратегия $\tilde{b}_1^*(v_1) = \frac{v_1}{2}$ является оптимальным ответом игрока 1 на байесовскую стратегию $\tilde{b}_2^*(v_2) = \frac{v_2}{2}$ игрока 2. По симметрии, для каждого $v_2 \in [0, 1]$, стратегия $\tilde{b}_2^*(v_2) = \frac{v_2}{2}$ является оптимальным ответом игрока 2 на байесовскую стратегию $\tilde{b}_1^*(v_1) = \frac{v_1}{2}$ игрока 1.

4.3.2 Парный аукцион

Снова на аукционе продается один предмет. Продавец называет цену s, а покупатель — цену b. Если $b < s$, то предмет не продается. Если же $b \geq s$, то предмет продается по цене $(b + s)/2$.

Продавец оценивает свой предмет суммой $v_s \in (0, 1]$, а покупатель — суммой $v_b \in [0, 1)$. Величины v_s и v_b независимы и равномерно распределены на $(0, 1)$. Стратегии продавца $s(v_s)$ есть функция, заданная на интервале $(0, 1]$б а стратегия покупателя $b(v_b)$ есть функция, заданная на интервале $[0, 1)$.

Функции выигрышей продавца и покупателя следующии:

$$\phi_s(s, b; v_s) = \begin{cases} (b + s)/2 - v_s, & \text{если } b \geq s, \\ 0, & \text{если } b < s, \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\phi_b(s, b; v_b) = \begin{cases} v_b - (b + s)/2, & \text{если } b \geq s, \\ 0, & \text{если } b < s. \end{cases} \tag{4.12}$$

Оптимальные стратегии продавца $\tilde{s}^*(v_s)$ и покупателя $\tilde{b}^*(v_b)$ являются

решениями включений:

$$\tilde{s}^*(v_s) \in \arg\max_{s\in(0,1]} \left(\frac{s + E(\tilde{b}^*(v_b)|\tilde{b}^*(v_b) \geq s)}{2} - v_s \right) \cdot \mathbb{P}(\tilde{b}^*(v_b) \geq s), \quad (4.13)$$

$$\tilde{b}^*(v_b) \in \arg\max_{b\in[0,1)} \left(v_b - \frac{E(\tilde{s}^*(v_s)|b \geq \tilde{s}^*(v_s)) + b}{2} \right) \cdot \mathbb{P}(b \geq \tilde{s}^*(v_s)). \quad (4.14)$$

Совместна ли система включений (4.13), (4.14)? Да, совместна! Причем, имется много решений. Например, для фиксированного $x \in (0,1)$ определим

$$\tilde{s}^*(v_s) = \begin{cases} x, & \text{если } v_s \leq x, \\ 1, & \text{если } v_s > x, \end{cases}$$

$$\tilde{b}^*(v_b) = \begin{cases} x, & \text{если } v_b \geq x, \\ 0, & \text{если } v_b < x. \end{cases}$$

В том, что пара $(\tilde{s}^*(v_s), \tilde{b}^*(v_b))$ является байесовским равновесием, можно убедиться формально проверяя справедливость включений (4.13), (4.14). Но проще прибегнуть к логическим рассуждениям. Если $v_s > x$, то продавец объявляет цену 1, которую покупатель не может превзойти. В этом случае любая стратегия покупателя дает ему нулевой выигрыш. Если $v_s \leq x$, то продавец объявляет цену x, и оптимальным ответом покупателя будет объявить минимальную цену x и купить предмет, если $v_b \geq x$, или объявить цену 0 (отказаться от покупки), если $v_b < x$. Итак, мы доказали, что $\tilde{b}^*(v_b)$ есть оптимальный ответ покупателя на стратегию продавца $\tilde{s}^*(v_s)$. Аналогично можно обосновать то, что стратегия продавца $\tilde{s}^*(v_s)$ является оптимальным ответом на стратегию покупателя $\tilde{b}^*(v_b)$.

4.4 Конечные байесовские игры

Как заметил Дж. Харсаний[2], конечную (когда у каждого игрока конечное число типов и стратегий) байесовскую игру можно смоделировать, вводя Природу в качестве игрока, который случайным образом в соответствии с заданным распределением вероятностей назначает типы игрокам. В результате получиться игра с несовершенной информацией. Ситуации равновесия в этой игре с несовершенной информацией соответствуют байесовским ситуациям равновесия в исходной байесовской игре. Продемонстрируем эту идею на примере.

Пример 4.1 *В настоящий момент на некотором рынке работает только одна фирма 1, которая решает, следует ли ей модернизировать свое предприятие. Фирма 2 решает, стоит ли ей выйти на рынок и составить конкуренцию фирме 1, если последняя не модернизирует свое предприятие (если фирма 1 модернизирует свое предприятие, то фирма 2 не сможет*

[2] J.C. Harsanyi. Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players. *Management Science* **14** (1967-68) 159–182, 320–334, and 486–502.

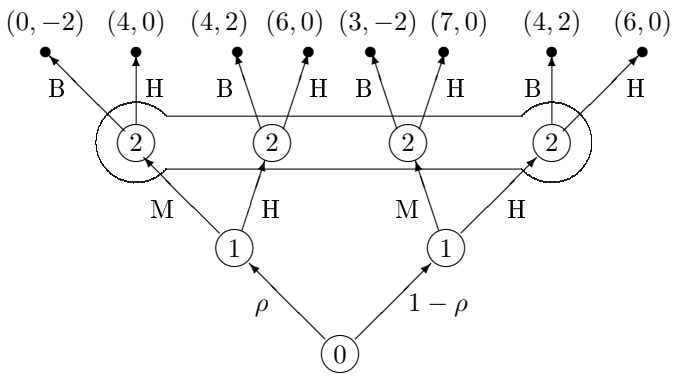


Рис. 4.1: Дерево игры для примера 4.1

с ней конкурировать и воздержится от выхода на рынок). Кроме этого, фирма 2 не знает реальных издержек фирмы 1 на модернизацию. Фирма 2 предполагает, что с вероятностью ρ ($0 < \rho < 1$) уровень инвестиций высокий, а с вероятностью $1 - \rho$ — низкий. Доходы (выигрыши) фирм в зависимости от уровня инвестиций фирмы 1 следующие:

Высокий:

	Высокие издержки	
	B	H
M	$0, -2$	$4, 0$
H	$4, 2$	$6, 0$

Низкий:

	Низкие издержки	
	B	H
M	$3, -2$	$7, 0$
H	$4, 2$	$6, 0$

Решение. Поскольку фирма 2 не имеет секретной информации, то у нее всего один тип $|T_2| = 1$ (единственный тип фирмы 1 мы можем обозначить произвольным образом). Фирма 1 скрывает информацию о размере инвестиций, поэтому у нее два типа $T_1 = \{h, l\}$, где h означает высокий уровень инвестиций, а l — низкий уровень.

Байесовская стратегия фирмы 1 должна указать ее действия для каждого из типов фирмы 1, т.е. фирме 1 нужно определить два значения

$$\tilde{s}_1(h), \tilde{s}_1(l) \in S_1 = \{M, H\},$$

где M — модернизировать предприятие, H — не модернизировать. Стратегия $s_2 \in S_2 = \{B, H\}$ фирмы 2 задает одно из двух ее решений: B — входить на рынок, а H — не входить.

Следуя идее Харсаний, данную байесовскую игру рассматриваем как игру двух лиц с несовершенной информацией, в которой первый случайный ход делает Природа. Дерево для данной игры представлено на рис. 4.1. Запишем стратегическую форму для этой игры:

	В	Н
ММ	$3(1-\rho), -2$	$7-3\rho, 0$
МН	$4(1-\rho), 2-4\rho$	$6-2\rho, 0$
НМ	$3+\rho, -2+4\rho$	$7-\rho, 0$
НН	$4, 2$	$6, 0$

Соответствие между байесовскими стратегиями игрока 1 и его стратегиями в биматричной игре следующее:

$$(\tilde{s}_1(h) = M, s_1(l) = M) \to MM,$$
$$(\tilde{s}_1(h) = M, s_1(l) = H) \to MH,$$
$$(\tilde{s}_1(h) = H, s_1(l) = M) \to MH,$$
$$(\tilde{s}_1(h) = H, s_1(l) = H) \to HH.$$

Решение данной биматричной игры зависит от значения ρ. Рассмотрим три случая.

a) Если $\rho < \frac{1}{2}$, то игра

	В	Н
ММ	$3(1-\rho), -2$	$7-3\rho, 0^*$
МН	$4(1-\rho), (2-4\rho)^*$	$6-2\rho, 0$
НМ	$3+\rho, -2+4\rho$	$(7-\rho)^*, 0^*$
НН	$4^*, 2^*$	$6, 0$

имеет две ситуации равновесия в чистых стратегиях:

(HH, B) с выигрышем 4 у фирмы 1 и выигрышем 2 у фирмы 2,

(HM, H) с выигрышем $(7-\rho)$ у фирмы 1 и выигрышем 0 у фирмы 2.

b) Если $\rho = \frac{1}{2}$, то игра

	В	Н
ММ	$\frac{3}{2}, -2$	$\frac{11}{2}, 0^*$
МН	$2, 0^*$	$5, 0^*$
НМ	$\frac{7}{2}, 0^*$	$\frac{13}{2}^*, 0^*$
НН	$4^*, 2^*$	$6, 0$

имеет те же две ситуации равновесия в чистых стратегиях, что и для случая $\rho < \frac{1}{2}$.

c) Если $\rho > \frac{1}{2}$, то игра

	В	Н
ММ	$3(1-\rho), -2$	$7-3\rho, 0^*$
МН	$4(1-\rho), 2-4\rho$	$6-2\rho, 0^*$
НМ	$3+\rho, (-2+4\rho)^*$	$(7-\rho)^*, 0$
НН	$4^*, 2^*$	$6, 0$

имеет одну ситуации равновесия в чистых стратегиях (HH, B). □

4.5 Сигнальные игры

Сигнальная игра — это многошаговая игра двух лиц, называемых *отправитель* (**S**) и *получатель* (**R**). Отправитель имеет некоторый известный ему тип $t \in T$ (T — множество возможных типов), но неизвестный получателю. В каждом раунде игры, с учетом своего типа, отправитель посылает сообщение $m \in M$, (M — множество допустимых сообщений). Получатель, имея сообщение m, выбирает *действие* $a \in A$ (A — множество возможных действий). При этом, отправитель выигрывает $\phi_{\mathbf{S}}(m, a; t)$, а получатель — $\phi_{\mathbb{R}}(m, a; t)$. Пусть $\mu(t)$ есть вероятность того, что отправитель имеет тип t.

Байесовская стратегия отправителя есть функция $\tilde{m} : T \to M$, т. е. отправитель типа t посылает сообщение $\tilde{m}(t)$[3]. *Стратегия* получателя есть функция $\tilde{a} : M \to A$, т. е. получатель, наблюдая сообщение m, выбирает действие $\tilde{a}(m)$.

Пара байесовских стратегий $(\tilde{m}^*, \tilde{a}^*)$ есть *совершенное байесовское равновесие в сигнальной игре*, если оптимальным ответом отправителя на стратегию получателя $\tilde{a}^*$ является стратегия $\tilde{m}^*$, и наоборот, оптимальным ответом получателя на стратегию отправителя $\tilde{m}^*$ является стратегия $\tilde{a}^*$. Если множество T возможных типов отправителя конечно, то мы ищем байесовское равновесие, решая включения:

$$\tilde{m}^*(t) \in \arg\max_{m \in M} \phi_{\mathbb{S}}(m, \tilde{a}^*(m); t), \quad t \in T, \tag{4.15}$$

$$\tilde{a}^*(m) \in \arg\max_{a \in A} \sum_{t: m = \tilde{m}^*(t)} \phi_{\mathbb{R}}(m, a; t)\, \mu_{\tilde{m}^*}(t|m) \quad m \in M, \tag{4.16}$$

где

$$\mu_{\tilde{m}^*}(t|m) = \frac{\mu(t)}{\sum\limits_{\tau: m = \tilde{m}^*(\tau)} \mu(\tau)}$$

есть вероятность того, что отправитель имеет тип t, при условии, что он послал сообщение m, пользуясь стратегией $\tilde{m}^*$.

Теперь предположим, что множества сообщений M и действий A конечные. *Смешанная байесовская стратегия* отправителя есть функция $\tilde{p} : T \to \mathbb{R}_+^M$, т. е. отправитель типа t посылает сообщение $m \in M$ с вероятностью $\tilde{p}_m(t)$ ($\sum_{t \in T} \tilde{p}_m(t) = 1$). *Смешанная стратегия* получателя есть функция $\tilde{q} : M \to \mathbb{R}_+^A$, т. е. получатель, наблюдая сообщение m, выбирает действие $a \in A$ с вероятностью $\tilde{q}_a(m)$ ($\sum_{a \in A} \tilde{q}_a(m) = 1$).

Если множество T возможных типов отправителя конечно, то мы ищем *совершенное байесовское равновесие в смешанных стратегиях* $(\tilde{p}^*, \tilde{q}^*)$, решая включения:

$$\tilde{p}^*(t) \in \arg\max_{p \in \Sigma^M} \sum_{m \in M} \sum_{a \in A} \phi_{\mathbb{S}}(m, a; t)\, p_m \tilde{q}_a^*(m), \quad t \in T, \tag{4.17}$$

$$\tilde{q}^*(m) \in \arg\max_{q \in \Sigma^A} \sum_{t \in T} \sum_{a \in A} \phi_{\mathbb{R}}(m, a; t)\, \mu_{p^*}(t|m)\, q_a, \quad m \in M. \tag{4.18}$$

[3] Напомним, что мы отмечаем знаком «$\sim$» байесовсие стратегии.

где условные вероятности $\mu_{\tilde{p}^*}(t|m)$ ($\mu_{\tilde{p}^*}(t|m)$ есть вероятность того, что отправитель имеет тип t, если получено сообщение m) вычисляются по правилу Байеса:

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{p}^*}(t|m) = \mathbb{P}(t|m) &= \frac{\mathbb{P}(m\cdot t)}{\mathbb{P}(m)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(m|t)\mathbb{P}(t)}{\sum_{\tau\in T}\mathbb{P}(m\cdot\tau)} = \frac{\mathbb{P}(m|t)\,\mathbb{P}(t)}{\sum_{\tau\in T}\mathbb{P}(m|\tau)\,\mathbb{P}(\tau)} \\ &= \frac{\tilde{p}^*_m(t)\mu(t)}{\sum_{\tau\in T}\tilde{p}^*_m(\tau)\,\mu(\tau)}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

В дальнейшем, в случае отсутствия двусмысленности, мы будем писать $\mu(t|m)$ вместо $\mu_{\tilde{p}^*}(t|m)$, опуская индекс $\tilde{p}^*$, который указывает на то, что вероятность $\mu_{\tilde{p}^*}(t|m)$ вычислена в предположении, что отправитель использует стратегию $\tilde{p}^*$.

Байесовское равновесие в сигнальной игре называется *пуловым равновесием*, если отправители всех типов используют одну и ту же стратегию (если речь идет о равновесии в чистых стратегиях, то они всегда посылают одинаковые сообщения). Если отправители различных типов используют разные стратегии, то такое равновесие назывется *отделяющим*.

4.5.1 Применение сигнальных игр в экономике

Первым применением сигнальных игр в экономике была сигнальная модель рынка труда, предложенная Нобелевским лауреатом 2001 года в области экономики М. Спенсом[4].

Предположим, что имется всего две группы служащих. Группа 1 состоит из людей с низкой продуктивностью, которая оценивается зарплатой равной 1, а в группу 2 входят люди с высокой продуктивностью, которая оценивается зарплатой равной 2. Если бы у нанимателей не было возможности отличать людей из разных групп, то они назначали бы зарплату случайным образом: 1 с вероятностью α и 2 с вероятностью $1-\alpha$, где α есть доля людей в группе 1. Тогда средний уровень зарплаты был бы равен $1\cdot\alpha+2\cdot(1-\alpha)=2-\alpha$. Заметим, что чем меньше размер группы 2 людей с высокой продуктивностью (чем больше α), тем больше их неудовлетворение средней зарплатой $2-\alpha$.

Сигналами называют такие косвенные факторы, которые может наблюдать лицо принимающее решение и которые коррелированы (положительно или отрицательно) с тем ненаблюдаемым фактором, по значению которого можно принять правильное решение. В данном примере ненаблюдаемым фактором для нанимателя является продуктивность человека, претендующего получить работу. Ясно, что людям из группы 1 нет никакого резона объявлять нанимателю, что они обладают низкой продуктивностью. В

[4] A.M. Spence. Job market signaling. *Quaterly Journal of Economics*, **87** (1973) 355–374. См. также Нобелевскую лекцию:
A.M. Spence. Signalling in retrospect and the informational structure of markets.

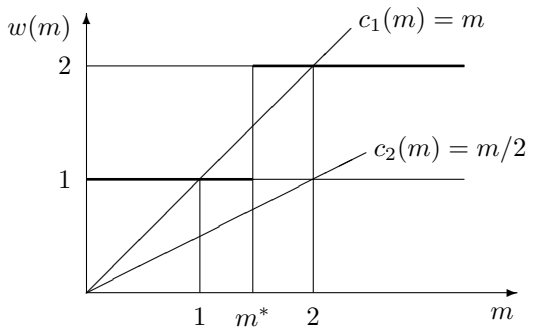


Рис. 4.2: Сигнальное равновесие

качестве сигнала (наблюдаемого фактора) Спенс использовал *образование* (точнее, количество лет обучения) претендента на работу. Предположим, что стоимость обучения в течении года для людей из группы 1 равна 1 (им нужно нанимать репетиторов, тратить больше времени на учебу и т. д.), а для людей из группы 2 равна 1/2. Тогда m лет обучения для человека из группы 1 стоит m, а для человека из группы 2 стоит $m/2$. В этом простом примере предполагается, что образование не влияет на продуктивность человека в той специальности, на которую он претендует. Заметим, что стоимость обучения обратно коррелирована с продуктивностью человека (ненаблюдаемым для нанимателя фактором).

Мы имеем сигнальную игру, где отправителями являются люди из групп 1 и 2, а получателем — наниматели. Отправители бывают двух типов: $T = \{1, 2\}$, где тип $t \in \{1, 2\}$ означает, что человек принадлежит группе t. Множество сообщений $M = [0, \infty)$ и сообщение $m \in M$ означает, что человек обучался m лет (здесь мы не предполагаем, что m есть целое число). У получателя (нанимателей) всего два действия (решения): $A = \{1, 2\}$, где действие 1 означает «назначить зарплату 1», а действие 2 означает «назначить зарплату 2». Здесь для любых $t \in T$, $m \in M$ и $a \in A$ выигрыши отправителя равен $\phi_S(m, a; 1) = a - 1 \cdot m$, $\phi_S(m, a; 2) = a - \frac{1}{2} \cdot m$, а получателя — $\phi_R(m, a; 1) = 1 - a$, $\phi_R(m, a; 2) = 2 - a$.

На основании предшествующего опыта наниматель определил уровень $m^* \in (1, 2)$, такой, что продуктивность человека, обучавшегося $m < m^*$ лет, равна 1 с вероятностью 1, а продуктивность человека, обучавшегося $m \geq m^*$ лет, равна 2 с вероятностью 1. Сказанное означает, что

$$\mu(1|m) = \begin{cases} 1, & m < m^*, \\ 0, & m \geq m^* \end{cases} \quad \text{и} \quad \mu(2|m) = \begin{cases} 0, & m < m^*, \\ 1, & m \geq m^*. \end{cases} \tag{4.20}$$

Функция $w(m)$, выражающая зависимость зарплаты человека от количества лет обучения m, изображена жирной линией на рис. 4.2. Здесь функция $c_i(m)$ выражает стоимость обучения для людей группы $i = 1, 2$.

Можно предположить, что при пороговом представлении нанимателя о

типе претендента на работу (определяется равенством (4.20)) его оптимальная стратегия определяется следующим образом:

$$\tilde{a}^(m) = \begin{cases} 1, & m < m^*, \\ 2, & m \geq m^*. \end{cases}$$

При таком поведении нанимателя выигрыши членов групп 1 и групп 2 соответственно равны

$$u_1(m) = w(m) - c_1(m) = \begin{cases} 1 - m, & m < m^*, \\ 2 - m, & m \geq m^*, \end{cases}$$

$$u_2(m) = w(m) - c_2(m) = \begin{cases} 1 - m/2, & m < m^*, \\ 2 - m/2, & m \geq m^*. \end{cases}$$

Максимизируя $u_1(x)$, группа 1 определяет свою оптимальную стратегию $m_1 = 0$, при которой ее выигрыш будет равен $u_1(m_1) = 1$. Оптимальной стратегией группы 2 яляется $m_2 = m*$, при которой ее выигрыш будет равен $u_2(m_2) = 2 - m^*/2 > 1$.

Следовательно, оптимальным ответом отправителя на стратегию нанимателя $\tilde{a}^*$ является байесовская стратегия $\tilde{m}^*$, которая определяется по правилу: $\tilde{m}^*(1) = 0$, а $\tilde{m}^*(2) = 0$. То, что стратегия нанимателя $\tilde{a}^*$ является оптимальным ответом на стратегию отправителя $\tilde{m}^*$ обосновывается тривиальным образом (сделайте это самостоятельно).

В заключение заметим, что членам группы 2 выгодно подавать сигналы о стоимости своего образования, при условии, что $m^* < 2\alpha$, поскольку в этом случае их доход $2 - m^*/2$ будет больше среднего дохода $2 - \alpha$ в случае отсутствия у нанимателей всякой информации о нанимаемых.

4.6 Рынок лимонов

«Рынок лимонов» — так называется статья Г. Акерлофа[5], за которую он получил в 2001 Нобелевскую премию в области экономики. В этой статье на примере рынка подержанных автомобилей (в США плохие автомобили называют «лимонами») дается анализ рынка с неполной и ассимметричной информацией. Проблема стара как стары сами рынки: «если он хочет продать лошадь, то хочу ли я ее купить?»

Покупатель приходит к продавцу подержанных автомобилей, в гараже у которого имеются автомобили только двух типов: хорошие (вишни), которые продаются за \$2500 при остаточной стоимости \$2000, и плохие (лимоны), которые продаются за \$1250 при остаточной стоимости \$1000.

Предположим, что количество хороших и плохих автомобилей в гараже одинаково. Если у покупателя нет никакой дополнительной информации

[5] G. Akerlof. The market for lemons: quolitative uncertainty and the market mechanism. *Quoterly Journal of Economics*. **84** (1970) 488–500.

(нет сигналов), то он вынужден выбирать автомобиль случайным образом: с вероятностью 1/2 он выберет хороший автомобиль, и с вероятностью 1/2 он выберет плохой автомобиль. Поэтому покупатель предложит за выбранный автомобиль среднюю цену $\frac{1}{2}(2500 + 1250) = \$1875$. Если выбранный автомобиль оказался плохим, то продавца устроит предложенная цена, и он продаст плохой автомобиль, заработав при этом $1875 - 1000 = \$875$. Если же выбранный автомобиль оказался хорошим, то продавец его не продаст за предложенную цену, поскольку его чистый доход $1875 - 2000 = -\$125$ окажется отрицательным. Поскольку покупатель за среднюю цену может купить только плохой автомобиль, то ему незачем предлагать \$1875 за автомобиль, который можно купить за \$1250. При таком поведении покупателей, средний доход продавца за один рауд торгов равен

$$\frac{1}{2}250 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 125,$$

что меньше ожидаемого дохода

$$\frac{1}{2}250 + \frac{1}{2} \cdot 500 = 375$$

при полной информированности покупателей и одинаковом спросе на оба типа автомбилей. Продавец будет вынужден уменьшить долю или совсем перестать продавать дорогие хорошие автомобили. Покупатели, которым нужен хороший автомобиль будут вынуждены перейти на рынок новых автомобилей.

Итак, мы получили, что

> при отсутствии информации у покупателей некачественны дешевые товары вытесняют из ассортимента дорогие качественные товары.

На рынке страховых услуг подобный феномен часто называют «обратной проблемой отбора (adverse selection problem)», когда вытесняются дешевые страховые полисы. Подобное также происходит на рынках кредитования, где вытесняются дешевые кредиты.

В рассмотренной ситуации представление покупателя о типе автомобиля следуюшее:

$$\mu(\text{плохой}) = \mu(\text{хороший}) = \frac{1}{2}.$$

Чтобы изменить ситуацию продавцу нужно каким-то образом лучше информировать покупателя (посылать какие-то сигназы), чтобы изменить его представление о типе автомобиля.

4.6.1 Сигнальная игра «рынок лимонов»

По прежнему считаем, что в гараже у продавца одинаковое количество плохих и хороших автомобилей и что покупатель не может отличить плохой

Таблица 4.1: Выигрыши игроков в игре » рынок лимонов»

Тип автомобиля	Стратегии	К (купить)	Н (не купить)
плохой	1000	$250, -150$	$0, 0$
	2500	$1500, -1400$	$0, 0$
хороший	2500	$500, 500$	$0, 0$

автомобиль от хорошего. Чтобы изменить информированность покупателя, продавец решил собъявлять ему свою цену, \$1250 или \$2500, на выбранный покупателем автомобиль (с вероятностью $1/2$ он выберет хороший автомобиль, и с вероятностью $1/2$ — плохой автомобиль). Затем покупатель должен будет решить, покупать автомобиль за данную цену или не покупать.

Понятно, что одни и те же сигналы продавца воспринимаются разными типами покупателей по-разному. Для конкретности, предположим, что наш покупатель приобретает автомобиль сроком на один год, чтобы в последующем его продать, хороший за \$1800, а плохой за \$900 (например, это студент, который покупает подержанный автомобиль на один учебный год). Эксплуатация в течении года хорошего автомобиля стоит \$800, а плохого \$1800 (дорогой ремонт). Кроме того покупатель оценивает пользу от обладания автомобилем в \$2250 (автомобиль делает человека более мобильным).

Теперь мы имеем сигнальную игру, где *отправитель* — это продавец, а *получатель* — это покупатель. У отправителя два типа (соответствуют типу автомобиля) и два сообщения:

$$T = \{\text{П}, \text{Х}\}, \quad M = \{1250, 2500\},$$

где «П» означает плохой, «Х»— хороший, 1250 — объявить цену \$1250, 2500 — объявить цену \$2500. У получателя два действия: $A = \{\text{К}, \text{Н}\}$, где «К» означает купить, а «Н»— не купить.

Выигрыши игроков представлены в табл. 4.1.

Для примера, вычислим выигрыши игроков в ситуации $(2500, \text{К})$ для хорошего автомобиля. Доход продавца:

$$\begin{aligned} &+2500 \quad \text{(сумма, заплаченная за автомобиль)} \\ &-2000 \quad \text{(остаточная стоимость автомобиля)} \\ &\quad\;\; = 500. \end{aligned}$$

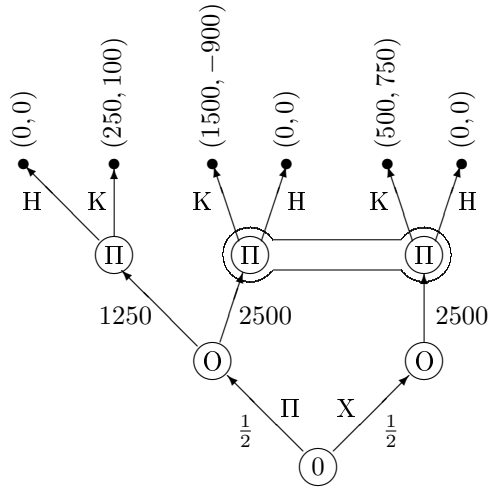


Рис. 4.3: Дерево для игры «рынок лимонов»

Выигрыш покупателя:

$+2250$ (польза от автомобиля)
$+1800$ (выручка от продажи автомобиля после года эксплуатации)
-2500 (сумма, заплаченная за автомобиль)
-800 (стоимость эксплуатации автомобиля в течении года)
$= 750.$

В случае, когда покупатель принимает решение не покупать автомобиль, вигрыши обоих, продавца и покупателя, равны 0.

Представим данную сигнальную игру как игру с несовершенной информацией. Дерево данной игры изображено на рис. 4.3. Поскольку покупатель знает, что продавец никогда не продает автомобили себе в убыток, то, услышав цену \$1250, он с уверен, что выбранный автомобиль плохой и ему предложена справедливая цена, которую он сразу принимает. Если продавец объявил цену \$2500, то покупатель не уверен в типе выбранного им автомобиля. Поэтому две его позиции (те, в которые входит дуга, помеченная числом 2500) объединены в одно информационное множество.

Мы можем упростить эту игру, удалив ход получателя, помеченный знаком «Н», в самой левой его позиции, поскольку в этой позиции получателю лучше сделать ход, помеченный знаком «К». С учетом этого упрощения, в данной игре у обоих игроков по две стратегии. У отправителя (продавца):

1) объявить цену \$1250 на плохой автомобиль и цену \$2500 на хороший;

2) объявить цену \$2500 на плохой автомобиль и цену \$2500 на хороший.

У получателя (покупателя):

1) купить, когда цена \$1250, и купить, когда цена \$2500;

2) купить, когда цена \$1250, и не купить, когда цена \$2500.

Стратегическая форма данной позиционной игры есть следующая биматричная игра

$$\begin{bmatrix} 375,425^* & 125^*,50 \\ 1000^*,-75 & 0,0^* \end{bmatrix},$$

в которй игрок 1 — это отправвитель, а игрок 2 — это получатель. Эта игра не имеет ситуаций равновесия в чистых стратегиях. Найдем ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.

Смешанные стратегии игроков 1 и 2 обозначим соответственно через $p = (p_1, 1-p_1)^T$ и $q = (q_1, 1-q_1)$. Поскольку игра не имеет решения в чистых стратегиях, то в ситуации равновесия (p^*, q^*) $p_1^* > 0$ и $q_1^* > 0$. Исходя из теоремы 2.7, чтобы найти ситуацию равновесия, нам нужно решить следующую систему неравенств:

$$\begin{aligned} 375q_1 + 125(1-q_1) &= v_1, \\ 1000q_1 + 0(1-q_1) &= v_1, \\ 425p_1 - 75(1-p_1) &= v_2, \\ 50p_1 + 0(1-p_1) &= v_2. \end{aligned}$$

Ее решение — $p_1^* = 1/6$, $q_1^* = 1/6$, $v_1^* = 500/3$, а $v_2^* = 50/6$. Следовательно, оптимальные стратегии игроков следующие:

$$p^* = (1/6, 5/6)^T, \quad q^* = (1/6, 5/6)^T$$

со средним выигрышем первого игрока (продавца) $v_1^* = 500/3$, второго игрока (покупателя) $v_2^* = 50/6$.

Мы видим, что, посылая сигналы, продавец смог увеличить свой средний доход за один торговый раунд с \$125 до \$$166\frac{2}{3}$.

Введем короткие обозначения для следующих событий:

\$1250 — продавец объявил цену \$1250;

\$2500 — продавец объявил цену \$2500;

К — покупатель купилавтомобиль;

Н — покупатель не купил автомобиль.

С учетом равенств

$$\begin{aligned} p_1^* &= \mathbb{P}((\$1250|\text{П}) \cdot (\$2500|\text{Х})) = \mathbb{P}(\$1250|\text{П}), \\ p_2^* &= \mathbb{P}((\$2500|\text{П}) \cdot (\$2500|\text{Х})) = \mathbb{P}(\$2500|\text{П}), \\ q_1^* &= \mathbb{P}((\text{К}|\$1250) \cdot (\text{К}|\$2500)) = \mathbb{P}(\text{К}|\$2500), \\ q_2^* &= \mathbb{P}((\text{К}|\$1250) \cdot (\text{Н}|\$2500)) = \mathbb{P}(\text{Н}|\$2500), \end{aligned}$$

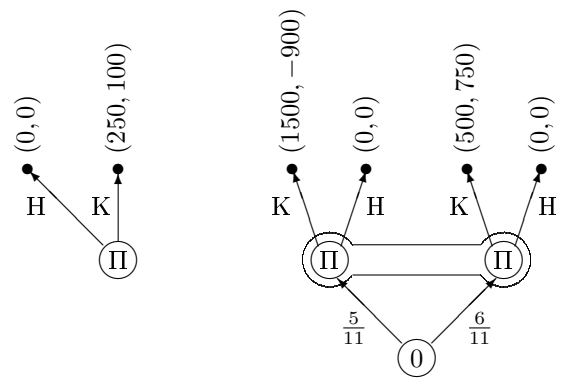


Рис. 4.4: Две подигры в игре » рынок лимонов»

мы можем записать байесовское равновесие (в смешанных стратегиях),

$$\begin{aligned}\tilde{p}^*(\Pi) &= p^* = (1/6, 5/6)^T,\\ \tilde{p}^*(\text{Х}) &= (0,1)^T,\\ \tilde{q}^*(\$1250) &= (1,0)^T,\\ \tilde{q}^*(\$2500) &= q^* = (1/6, 5/6)^T.\end{aligned}$$

Теперь, когда мы определили оптимальный способ поведения продавца, мы можем вычислить представление получателя (покупателя) о типах отправителя:

$$\begin{aligned}\mu(\Pi|1250) = 1, &\quad \mu(\text{Х}|1250) = 0,\\ \mu(\Pi|2500) = x, &\quad \mu(\text{Х}|2500) = 1 - x,\end{aligned}$$

где вероятность x нам следует определить. Поскольку продавец не будет торговать себе в убыток, то покупатель считает что он не будет объявлять цену \$1250 за хороший автомобиль ($\mu(\text{Х}|1250) = 0$), поскольку \$1250 меньше остаточной стоимости хорошего автомобиля равной \$2000. По формуле (4.19)

$$x = \frac{\tilde{p}_2^*(\Pi)\,\mu(\Pi)}{\tilde{p}_2^*(\Pi)\,\mu(\Pi) + \tilde{p}_2^*(\text{Х})\,\mu(\text{Х})} = \frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{5}{11}.$$

Значит в данной сигнальной игре представление получателя о типах отправителя задается вероятностями:

$$\begin{aligned}\mu(\Pi|1250) = 1, &\quad \mu(\text{Х}|1250) = 0,\\ \mu(\Pi|2500) = \frac{5}{11}, &\quad \mu(\text{Х}|2500) = \frac{6}{11}.\end{aligned}$$

Чтобы убедиться, что байесовское равновесие $(\tilde{p}^*, \tilde{q}^*)$ является совершенным (см. определение в § 3.4), нужно проверить, что его сужение на

две подигры, представленные на рис. 4.4, является равновесием для этих подигр. В обоих подиграх принимает участие только один игрок — получатель. Для левой подигры, стратегия $\tilde{q}^*(\$1250) = (1,0)^T$, которая соответствует чистой стратегии «К» (купить), является оптимальной. Для правой подигры, обе чистых стратегии «К» (купить) и «Н» (не купить) дают получателю одинаковый нулевой выигрыш. Поэтому любая комбинация этих стратегий, в частности стратегия $\tilde{q}^*(\$2500) = (1/6, 5/6)^T$, будет оптимальной для получателя, принося нулевой выигрыш.

4.7 Равновесие в смешанных стратегиях как предел байесовского равновесия

Новую интерпрететацию понятия «смешанной стратегии» как предела байесовского равновесия предложил Дж. Харсаний (см. ссылку на стр. 64). В этом параграфе мы продемонстрируем эту интерпретацию на конкретном примере.

Рассмотрим игру «конфликт полов» (см. пример 2.8) со следующими выигрышами игроков:

	Футбол	Балет
Футбол	$2^*, 1^*$	$0, 0$
Балет	$0, 0$	$1^*, 2^*$

Вспомним, что в этой игре имеется два равновесия $(1,1)$ и $(2,2)$ в чистых стратегиях и одно равновесие в смешанных стратегиях $p^* = (2/3, 1/3)$ и $q^* = (1/3, 2/3)$.

Теперь предположим, что супруги не вполне уверены в предпочтениях своих избранников. Более точно, предположим, что выигрыши супругов следующие:

	Футбол	Балет
Футбол	$2 + t_h, 1$	$0, 0$
Балет	$0, 0$	$1, 2 + t_w$

Здесь t_h и t_w равномерно распределенные на отрезке $[0, x]$ независимые случайные величины. Предполагается, что муж знает величину t_h, а жена — t_w.

Здесь мы имеем байесовскую игру двух лиц с $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{1, 2\}$, $T_1 = T_2 = [0, x]$, $\mu_1(t_w \geq w | t_h \geq h) = p_1(t_w \geq w) = (x - w)/x$, $\mu_2(t_h \geq h | t_w \geq w) = p_2(t_h \geq h) = (x - h)/x$.

Мы будем искать байесовское равновесие Нэша в классе пороговых стра-

тегий:

$$\tilde{s}_1(t_h) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_h \geq h, \\ 2, & \text{если } t_h < h, \end{cases}$$
$$\tilde{s}_2(t_w) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_w < w, \\ 2, & \text{если } t_w \geq w. \end{cases}$$

Здесь муж (игрок 1) играет стратегию 1, если t_h превосходит некоторое пороговое значение h, и стратегию 2 в противном случае. Аналогично, жена (игрок 2) играет стратегию 2, если t_w превосходит некоторое пороговое значение w, и стратегию 1 в противном случае. Для данного x определим такие пороговые значения h и w, что пара стратегий $(\tilde{s}_1(t_h), \tilde{s}_2(t_w))$ образует байесовское равновесие Нэша.

Если жена играет стратегию $\tilde{s}_2(t_w)$, то ожидаемый выигрыш мужа равен

$$\frac{w}{x}(2 + t_h) + \frac{x - w}{x}0 = \frac{w}{x}(2 + t_h),$$

если он играет первую стратегию, и

$$\frac{w}{x}0 + \frac{x - w}{x}1 = \frac{x - w}{x},$$

если он играет вторую стратегию. Мужу играть первую стратегию оптимально, если

$$\frac{w}{x}(2 + t_h) \geq \frac{x - w}{x},$$

или $t_h \geq \frac{x}{w} - 3$. Следовательно, $h = \frac{x}{w} - 3$.

Аналогично, если муж играет стратегию $\tilde{s}_1(t_h)$, то ожидаемый выигрыш жены равен

$$\frac{x - h}{x}1 + \frac{h}{x}0 = \frac{x - h}{x},$$

если она играет первую стратегию, и

$$\frac{x - h}{x}0 + \frac{h}{x}(2 + t_w) = \frac{h}{x}(2 + t_w),$$

если она играет вторую стратегию. Жене играть вторую стратегию оптимально, если

$$\frac{h}{x}(2 + t_w) \geq \frac{x - h}{x},$$

или $t_w \geq \frac{x}{h} - 3$. Следовательно, $w = \frac{x}{h} - 3$.

Итак, мы имеем систему из двух уравнений

$$h = \frac{x}{w} - 3,$$
$$w = \frac{x}{h} - 3.$$

Отсюда $h = w$ и $w^2 + 3w - x = 0$. Решая это квадратное уравнение, находим

$$h = w = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{x \to 0} \frac{h}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{w}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9 + 4x} - 3}{2x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{9 + 4x - 9}{2x(\sqrt{9 + 4x} + 3)} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, по мере сокращения неопределенности x, байесовская ситуация равновесия Нэша $(\tilde{s}_1(t_h), \tilde{s}_2(t_w))$, при которой

- жена полагает, что муж выбирает стратегию 1 с вероятностью $1 - h/x$ и стратегию 2 с вероятностью h/x;
- муж полагает, что жена выбирает стратегию 1 с вероятностью w/x и стратегию 2 с вероятностью $1 - w/x$

стремится к ситуации равновесия в смешанных стратегиях

$$(p^*, q^*) = ((2/3, 1/3)^T, (1/3, 2/3)^T)$$

для игры с полной информацией.

4.8 Упражнения

1. В игре двух лиц игрок 1 имеет полную информацию об игроке 2, в то время как игрок 2 предполагает, что игрок 1 с равной вероятностью обладает одной из двух технологий. У каждого из игроков имеется по две стратегии. В зависимости от технологии игрока 1 матрицы выигрышей игроков следующие:

$$\text{Технология 1:} \quad \begin{pmatrix} 1,1 & 0,2 \\ 0,2 & 1,1 \end{pmatrix}, \qquad \text{Технология 2:} \quad \begin{pmatrix} 2,2 & 0,1 \\ 3,4 & 2,3 \end{pmatrix}.$$

a) Постройте позиционную игру с несовершенной информацией и найдите все байесовские ситуации равновесия в чистых стратегиях.

b) Проведите анализ возможных случаев и найдите все байесовские ситуации равновесия в смешанных стратегиях.

2. Студент (игрок 1) выпускного курса вуза претендует получить работу на фирме. Наниматель (игрок 2), судя по оценкам студента, считает, что вероятность того, что этот студент *умный*, равна ρ. Соответственно, по мнению нанимателя, вероятность того, что этот студент *глупый* равна $1 - \rho$. Студент может проводить свободное время на пляже, или, чтобы лучше подготовиться к предстоящей работе, посещать платные курсы (и это наниматель

может легко проверить). Наниматель должен решить нанять студента или не нанять. Выигрыши игроков в зависимости от типа студента (умный или глупый) следующие:

Умный

	Нанять	Не нанять
Пляж	$4, 2$	$1, 0$
Курсы	$2, 3$	$-1, 0$

Глупый

	Нанять	Не нанять
Пляж	$4, -2$	$1, 0$
Курсы	$2, 1$	$-1, 0$

Найти совершенное байесовское равновесие для различных значений δ.

3. Два игрока затеяли спор, который закончиться дракой, если ни один из игроков не уступит в споре. В драке одержит верх физически сильнейший из игроков. Игрок 1 не знает насколько силен игрок 2, а игрок 2 с вероятностью δ полагает, что игрок 1 сильнее, и с вероятностью $1 - \delta$ — слабее. У каждого из игроков две стратегии: драться, уступить. В зависимости от того, какой из игроков сильнее, выигрыши игроков представлены в следующих таблицах:

Игрок 1 сильнее

	драться	уступить
драться	$1, -1$	$1, 0$
уступить	$0, 1$	$0, 0$

Игрок 2 сильнее

	драться	уступить
драться	$-1, 1$	$1, 0$
уступить	$0, 1$	$0, 0$

Найти совершенное байесовское равновесие.

4. В беспроводных ad hoc сетях системы защиты от вторжений (IDS[6]) могут быть установлены в отдельных узлах сети, но это существенно повышает затраты энергии на таких узлах. Игрок 1 — это некоторый узел i, который подключается к сети. Этот узел может *нормальным*, который подключается для работы в сети, или *вредным*, который подключается, чтобы нанести ущерб всей сети или отдельным ее узлам. Игрок 2 — это некоторый узел сети j, который с вероятностью δ полагает, что подключающийся узел вредный.

Вредный узел может *атаковать* или *работать* в сети, а нормальный узел может только *работать*. игрок 2 (узел j) может *мониторить* или *не мониторить*. Игрок 2 оценивает материальный вред (из-за нарушения целостности данных), который может принести успешная атака вредного узла, равным l. Будем также считать, что игрок 1 рассматривает потери игрока 2 как свой выигрыш. Стоимость атаки равна c_a, а стоимость мониторинга c_m.

IDS, установленная в узле j имеет следующие характеристики:

- *уровень обнаружения* $\alpha \in (0, 1]$, т. е. в случае атаки на узел, работающая IDS обнаружит атаку с вероятностью α;
- *уровень ложной тревоги* $\beta \in [0, 1)$, т. е. в случае отсутствия атаки, работающая IDS выдаст сигнал тревоги с вероятностью β; усилия игрока 2 по преодолению ложной атаки равны f.

[6] intrusion detection system

Игрок 2 принимает решение, мониторить или не мониторить, когда он включает свой компьютер, т. е. до того, как игрок 1 (узел i) подсоединяется к сети.

1. Построить дерево игры и перейти к стратегической форме, если
   а) игрок 1 не может проверить, работает ли IDS на узле игрока 2;
   б) игрок 1 может проверить, работает ли IDS на узле игрока 2.
2. Для обоих случаев, а) и б), найти совершенное байесовское равновесие для следующих значений параметров:

$$\delta = 0.2,\ l = 2,\ c_a = 1,\ c_m = 1,\ \alpha = 0.9,\ \beta = 0.1,\ f = 1.$$

5. Банк должен решить давать ли Ивану годовой заем в \$11 000 на покупку автомобиля, который стоит \$13 000. На данный момент Иван вполне удовлетворен своей легкой работой с годовым доходом \$8 000. Иван пообещал, что если он получит кредит, то перейдет на более тяжелую работу и за год сможет заработать \$15 000. Банк полагает, что с вероятностью 1/4 Иван является лентяем и поэтому не выполнит обещание перейти на тяжелую работу. Нелентяй всегда выполнит свое обещание. Если Иван получит кредит и через год не вернет его, то банк заберет автомобиль, который после одного года эксплуатации стоит \$12 000, и продаст его за \$10 000. Какой максимальный процент может назначить банк, чтобы рационально мыслящий Иван вернул кредит.

Глава 5

Кооперативные игры

Большинство неантагонистических конфликтов в экономике и смежных с ней областях характеризуется тем, что их участники могут объединять свои усилия. Сотрудничество между игроками приводит к качественно новому типу конфликта между его участниками в сравнении с бескоалиционным случаем.

Как мы знаем, в бескоалиционной игре отклонение одного из игроков от ситуации равновесия не может дать ему какого-либо преимущества. Но при отклонении сразу нескольких игроков эти игроки могут получить больший выигрыш по сравнению с тем, что они имели в ситуации равновесия. Поэтому в условиях, когда возможна кооперация между игроками, использование ситуаций равновесия в качестве решений игры уже себя не оправдывает. При возможности кооперации возникает противоречие между устойчивостью ситуации, выраженной в виде равновесия, и ее целесообразностью, отражающей стремление игроков получить бóльшие выигрыши.

5.1 Коалиции и дележи

Пусть условия неантагонистического конфликта n игроков таковы, что допускается заключение взаимообязывающих соглашений между игроками. Предположим, что выигрыши игроков измеряются в одной общей единице и имеется механизм перераспределения выигрышей между игроками. Тогда достаточно рассмотреть только выигрыши игроков, которые образуют коалиции. В кооперативных играх главное — это формирование коалиций, а не поиск стратегий в самой игре. Сила коалиции $S \subseteq N = \{1, \ldots, n\}$ характеризуется числом $v(S)$, которое определяется следующим образом. Объединение игроков S рассматривается как объединенный игрок I, стратегиями которого являются всевозможные совместные действия игроков коалиции, а выигрыш равен сумме выйгрышей всех игроков из S. В худшем случае для этого коллективного игрока I остальные игроки из $N \setminus S$ могут также объединиться в некоторого коллективного игрока II, интересы

которого диаметрально противоположны интересам игрока I. В результате коалиция S (как игрок I) может гарантировать себе выигрыш $v(S)$, равный цене образовавшейся антагонистической игры. Иными словами, $v(S)$ есть математическое ожидание гарантированного выигрыша игроков коалиции S, которые действуют совместно против объединенных игроков коалиции $N \backslash S$. Мы будем считать, что $v(S)$ существует для кажндой коалиции $S \subseteq N$.

Пример 5.1 (Игра «покупка лошади») *Владелец лошади (P_1) оценивает ее в 500\$. Два покупателя (P_2 и P_3) оценивают лошадь соответственно в 1000\$ и 900\$. Если принять, что полезность объекта соответствует его цене, то первый игрок имеет полезность $v(1) = 500$, тогда как двое других не имеют ничего: $v(2) = v(3)$. Однако полезность может возрасти в результате сделки между игроками. Полезность всех возможных коалиций следующая:*

$$\begin{aligned} v(1) &= 500, \\ v(2) = v(3) = v(2,3) &= 0, \\ v(1,3) &= 900, \\ v(1,2) = v(1,2,3) &= 1000. \end{aligned}$$

Кооперативной игрой n лиц называется пара (N, v), где функция v, определена на множестве 2^N всех подмножеств множества N и удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} v(\emptyset) &= 0, \\ v(S \bigcup T) &\geq v(S) + v(T) \quad \text{(супераддитивность)}. \end{aligned}$$

Функция v называется *характеристической функцией кооперативной игры*, где $v(i)$ есть сила коалиции $\{i\}$, т.е. значение выигрыша игрока i, при условии, что он действует самостоятельно. Подмножества множества N называются *коалициями*.

Кооперативная игра (N, v) называется *существенной*, если

$$\sum_{i \in N} v(i) < v(N).$$

Дележом в игре (N, v) называется вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \quad \text{(коллективной рациональности)}, \tag{5.1}$$

$$x_i \geq v(i), \quad i \in N \quad \text{(индивидуальной рациональности)}. \tag{5.2}$$

$$\tag{5.3}$$

В игре «покупка лошади» дележами будут все векторы $x = (x_1, x_2, x_3)$, которые удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = 1000; \\ &x_1 \geq 500, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Условие *коллективной рациональности* (5.1) требует, чтобы вся полезность была распределена.

Условие *индивидуальной рациональности* (5.2) означает, что в любой коалиции каждый игрок должен получать не меньше того, что он может выиграть самостоятельно. Иначе игрок откажется участвовать в такой коалиции.

Заметим, что в несущественной игре имеется только один дележ $x = (v(1), v(2), \ldots, v(n))$.

5.1.1 Ядро

Дележ x *нестабилен* из-за коалиции $S \subset N$, если $v(S) > \sum_{i \in S} x_i$. В таком случае суммарный выигрыш игроков коалиции S меньше того, что коалиция может получить действуя самостоятельно. Поэтому игроки коалиции S объединившись, смогут расстроить соглашение, приведшее к формированию дележа x.

Мы также говорим, что дележ нестабилен, если он нестабилен из-за какой-либо коалиции, иначе дележ называется *стабильным*. Множество всех стабильных дележей составляет *ядро* кооперативной игры. По определению

$$C(v) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{i \in N} x_i = v(N),\ \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\ \forall S \subset N \right\}. \tag{5.4}$$

Пример 5.2 *Имеется три предприятия. Первое предприятие может выпускать товары типа D_1 в количестве 900 единиц, второе предприятие — товары типа D_1 в количестве 700 единиц, а третье — товары типа D_2 в количестве 1000 единиц. Товары типов D_1 и D_2 продаются только комплектами: одна единица товара D_1 и одна единица товара D_2. Единица обоих товаров стоит \$1. Прогназируется спрос на 1000 комплектов.*

Решение. Общие возможности предприятий превосходят прогнозируемый спрос. Поскольку каждое предприятие стремится продать по-возможности большее количество продукции, налицо конфликтная ситуация. Если допустить, что предприятия могут заключать соглашения и выплачивать друг другу компенсации, то данный конфликт моделируется кооперативной игрой трех лиц, $N = \{1, 2, 3\}$. Определим характеристическую функцию игры. Так как ни один из игроков коалиции $S = \{1, 2\}$ не может производить комплекты, то их продукция не может быть реализована и поэтому $v(1) = v(2) = v(3) = v(1, 2) = 0$. Коалиции $S = \{1, 3\}$ и $S = \{2, 3\}$ выпустят соответственно 900 и 700 комплектов, т.е. будет получена прибыль $v(1, 3) = 1800$ и $v(2, 3) = 1400$. А коалиция из всех трех предприятий получит доход $v(1, 2, 3) = 2000$. Таким образом, характеристическая функция

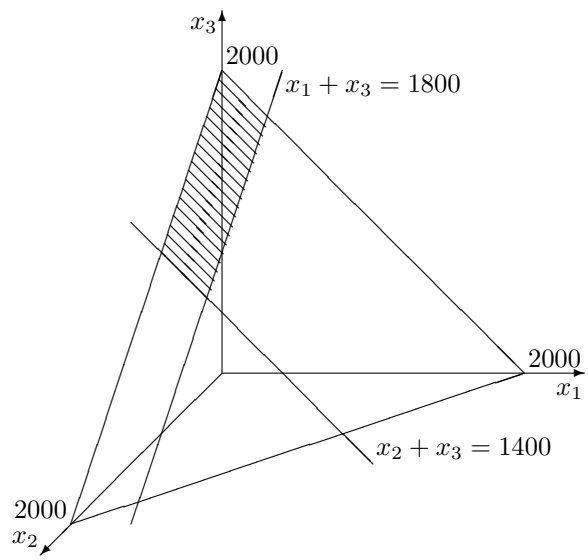
этой кооперативной игры определяется по правилу:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & S = \{\{1\},\{2\},\{3\}\{1,2\}\}, \\ 1800, & S = \{\{1,3\}\} \\ 1400, & S = \{\{2,3\}\} \\ 2000, & S = \{\{1,2,3\}\}. \end{cases}$$

Ядро данной игры задается следующими неравенствами

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &\geq 1800, \\ x_2 + x_3 &\geq 1400, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2000, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решим эту систему графически:



Заштрихованая зона на этом рисунке и есть ядро. □

Поскольку в игре трех лиц ядро лежит на гиперплоскости $x_1 + x_2 + x_3 = v(1,2,3)$, то нам будет удобнее изображать ядро не в трехмерном пространстве, а на этой гиперплоскости. Продемонстрируем это на следующем примере.

Пример 5.3 *Определить ядро для игры со следующей характеристической функцией:*

$$\begin{aligned} &v(\emptyset) = v(2) = 0, \quad v(1) = v(3) = 1, \\ &v(1,2) = 4, \quad v(1,3) = 3, \quad v(2,3) = 5, \\ &v(1,2,3) = 8. \end{aligned}$$

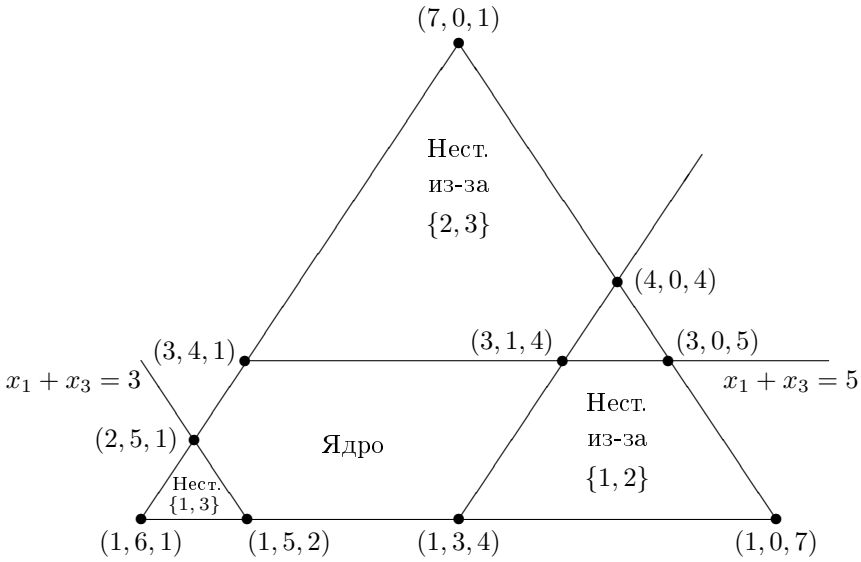


Рис. 5.1: Ядро игры из примера 5.3

Решение. Дележами являются точки (x_1, x_2, x_3), удовлетворяющие неравенствам

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8,$$
$$x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 1.$$

Множество решений этой системы есть треугольник в $\mathbb{R}^3$ с вершинами $(7, 0, 1)$, $(1, 6, 1)$ и $(1, 0, 7)$. Представим, что мы рисуем на плоскости, заданной уравнением $x_1 + x_2 + x_3 = 8$. Тогда наше множество дележей будет предствалено как равносторонний треугольник (см. рис. 5.1). Пересечения плоскостей типа $x_1 = 1$ или $x_1 + x_3 = 3$ (что то же, что и $x_2 = 5$) с плоскостью $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ являются прямыми параллельными сторонам треугольника дележей.

Ядро игры есть множество решений системы неравенств:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8,$$
$$x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 1,$$
$$x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 + x_3 \geq 3,\ x_2 + x_3 \geq 5.$$

Каждое из трех последних неравенств отсекает часть нестабильных дележей. Например, нестабильные дележи из-за коалиции $\{1, 2\}$ лежат ниже прямой $x_1 + x_2 = 4$. Ядро (пятиугольник на рис. 5.1) есть часть треугольника дележей за вычетом всех нестабильных дележей. □

Как в рассмотренном примере ядро может содержать много дележей, но имееются игры с пустым ядром.

Пример 5.4 *(***Голосование пяти участников***). В голосовании принимают участие пять челове. Игрок 1 (сильный игрок) имеет 3 голоса, а все остальные имеют по одному голосу. Для принятия решения необходимо 4 голоса из имеющихся 7.*

Решение. Характеристическая функция игры принимает следующие значения:

$$\begin{aligned} &v(1) = 0, \\ &v(S) = 0, \text{ если } |S| \le 3,\ 1 \notin S, \\ &v(S) = 1, \text{ для всех остальных } S. \end{aligned}$$

Ядро в этой игре есть множество решений следующей системы неравенств:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad\quad \ge 1, \\ x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad \ge 1, \\ x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad \ge 1, \\ x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 \ge 1, \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ \ge 0 \end{array} \tag{5.5}$$

Сложив второе неравенство, умноженное на 3, с третьим, четвертым, пятым и шестым неравенствами, получим неравенство

$$4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \ge 7,$$

которое противоречит первому равенству. Это доказывает, что система (5.5) не имеет решениий. □

В заключение, рассмотрим пример «идеальной» кооперативной игры с единственным стабильным дележем.

Пример 5.5 *Ученый изобрел новое лекарство, но не может производить его самостоятельно. Ученый может продать формулу лекарства одной из двух фармацевтических компаний. Удачливая компания согласна разделить с ученым поровну ожидаемую прибыль в $1 млн. Составить характеристическую функцию для данной игры и определить ядро.*

Решение. У нас три игрока: 1) ученый; 2) компания 1; 3) компания 2. Характеристическая функция игры:

$$\begin{aligned} &v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0, \\ &v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 1000000. \end{aligned}$$

Ядро описывается неравенствами:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1000000, \\ x_1 + x_3 &\geq 1000000, \\ x_2 + x_3 &\geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1000000, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Сложив три первых неравенства, получим неравенство

$$2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 2000000,$$

или

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1000000.$$

Но поскольку $x_1 + x_2 + x_3 = 1000000$, то мы должны сделать вывод, что три первых неравенства, определяющих ядро, должны выполняться как равенства.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1000000, \\ x_1 + x_3 &= 1000000, \\ x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1000000, \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим единственное рещение $x^* = (1\,000\,000, 0, 0)$. Значит ядро содержит только один дележ x^*, что подчеркивает доминирующее положение игрока 1. □

5.2 Значение игры по Шепли

Концепция ядра полезна в качестве меры стабильности игры. Если ядро содержит много дележей, то у нас нет механизма, чтобы выбрать наиболее предпочтительный дележ. Еще хуже, если ядро пустое.

В этом параграфе мы рассмотрим другой подход анализа кооперативных игр. В рамках этого подхода, выделяется один дележ, называемый значением игры. Компоненты этого дележа можно рассматривать как ценность или силу отдельных игроков. Альтернативно, значение игры можно рассматривать как ее исход, определенный некоторым *справедливым* и непредвзятым арбитром.

Предположим, что i-й игрок получает выигрыш

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subset N} \frac{(n - |S| - 1)!\,|S|!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)), \tag{5.6}$$

равный средней величине своих вкладов во все коалиции. Число $v(S\cup\{i\})-v(S)$ есть вклад игрока i при присоединении к коалиции S, а весовой множитель

$$\frac{(n-|S|-1)!\,|S|!}{n!}$$

можно рассматривать как вероятность образования коалиции S.

Значением Шепли[1] кооперативной игры (N,v) называется вектор

$$\phi(v) \stackrel{\text{def}}{=} (\phi_i(v),\ldots,\phi_n(v)).$$

Нетрудно показать, что значение Шепли — это единственный дележ, который

симметричен: $\phi_i(v)=\phi_j(v)$ для симметричных игроков i и j (два игрока симметричны, если присоединение любого из этих игроков к любой коалиции $S\subset N\setminus\{i,j\}$, одинаково усиливает эту коалицию: $v(S\cup\{i\})=v(S\cup\{j\})$);

аддитивен: для любых двух игр (N,v), (N,w) и любого $i\in N$ справедливо равенство $\phi_i(v+w)=\phi_i(v)+\phi_i(w)$;

назначает нулевой выигрыш $\phi_i(v)=0$ нулевым игрокам $i\in N$ (игрок i *нулевой*, если $v(S\cup\{i\})=v(S)$ для всех $S\in N\setminus\{i\}$).

Вычислим значение Шепли для игры «покупка лошади».

Решение.

Перестановка	Вклады игроков		
	1	2	3
(1,2,3)	500	500	0
(1,3,2)	500	100	400
(2,1,3)	1000	0	0
(2,3,1)	1000	0	0
(3,1,2)	900	100	0
(3,2,1)	1000	0	0
Средний вклад	4900/6	700/6	400/6

Значит значение Шепли для данной игры есть дележ

$$(4900/6, 700/6, 400/6) = \left(816\frac{2}{3}, 116\frac{2}{3}, 66\frac{2}{3}\right).$$

Покажем, что данный дележ не принадлежит ядру. Для этого сперва запишем неравенства, определяющие ядро:

$$\begin{aligned}
&x_1\ge 500,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\\
&x_1+x_2\ge 1000,\\
&x_1+x_3\ge 900,\\
&x_1+x_2+x_3=1000.
\end{aligned}$$

[1] L.S. Shapley. A value for n-person games. In H. Kuhn, A.W. Tucker, *Contributions in the Theory of Games II*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1953, pp. 307–317.

Отняв от последнего равенства неравенство $x_1 + x_2 \geq 1000$, получим неравенство $x_3 \leq 0$. Значит, $x_3 = 0$. Аналогично, отняв от последнего равенства неравенство $x_1 + x_3 \geq 900$, получим неравенство $x_2 \leq 100$. Значит ядро есть следующее множество:

$$\{(1000 - \alpha, \alpha, 0) : \ 0 \leq \alpha \leq 100\}.$$

Таким образом, P_2 покупает лошадь, уплатив от 900\$ до 1000\$. Несмотря на то, что игрок P_3 не может купить лошадь, его роль в данной игре существенна, поскольку без его участия игрок P_2 смог бы купить лошадь за менее чем \$900. Так как третья компонента значения Шепли ненулевая, то значение Шепли не принадлежит ядру. □

Значение Шепли можно рассматривать как силу индивидуальных членов политических и экономических организаций.

Игра (N, v) называется *простой*, если $v(S)$ равно 0 или 1 для всех коалиций $S \subseteq N$.

Типичные примеры простых игр:

(*голосование простым большинством*) $v(S) = 1$, если $|S| > n/2$, иначе $v(S) = 0$;

(*голосование консенсусом*) $v(N) = 1$, $v(S) = 0$ для всех $S \subset N$;

(*взвешенное голосование*) для заданных весовых множителей w_i ($i \in N$) и квоты q

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i > q, \\ 0, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i \leq q; \end{cases}$$

(*диктаторская игра*) $v(S) = 1$, если $1 \in S$, иначе $v(S) = 0$.

Для простых игр формула (5.6) для вычисления значения Шепли упрощается, поскольку разность $v(S \cup i) - v(S)$ всегда равна 0 или 1. Точнее, эта разность равна 0, если $v(S \cup i) = v(S)$, и 1, если $v(S \cup i) > v(S)$. Поэтому формулу (5.6) можно упростить следующим образом:

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ v(S)=1,\ v(S \setminus i)=0}} \frac{(|S| - 1)!\,(n - |S|)!}{n!}. \tag{5.7}$$

Пример 5.6 *Одним процентом акций Белтрансгаза владеют члены трудового коллектива. Предположим, что при создании совместного предприятия остальные акции поделили поровну мужду Газпромом и правительством РБ. Для простоты будем рассматривать всех членов трудового коллектива как единого владельца (что малореалистично). Определим цену любой коалиции, которая может принять решение, равной 1, а цену любой другой коалиции — равной 0. Решение принимается, если за него проголосовали 50% плюс одна акция. Оцените силу каждого из держателей акций, вычислив цену Шепли.*

Решение. Будем считать, что правительство РБ — это игрок 1, Газпром — игрок 2, а объединенные акционеры — игрок 3. Это игра типа «взвешенное голосование» с весовыми множителями $w_1 = w_2 = 49.5$, $w_3 = 1$ и квотой $q = 50$. Характеристическая функция данной игры следующая:

$$v(\emptyset) = v(1) = v(2) = v(3) = 0,$$
$$v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = v(1,2,3) = 1.$$

В силу полной симметрии все компоненты значения Шепли равны между собой. Поскольку

$$\phi_1(v) = 2\frac{(2-1)!\,(3-2)!}{3!} = \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{3},$$

значение Шепли для данной игры есть вектор $(1/3, 1/3, 1/3)$, согласно которому все игроки равносильны. □

Пример 5.7 *Докажите, что ядро простой игры (N, v) непустое тогда и только тогда, когда имеется хотя бы один игрок с правом вето (игрок i имеет право вето, если $v(N \setminus \{i\}) = 0$).*

5.3 Сердцевина

Значение Шепли в общем случае не удовлетворяет условию индивидуальной рациональности и потому не является даже дележом. Кроме того, если это возможно, то хотелось бы, чтобы «справедливый» дележ был стабильным (принадлежал ядру). Иная интересная концепция для определения «справедливого» дележа предложена Шмайдлером[2]. Основная идея здесь состоит в том, чтобы получить дележ, который вызывает наименьшую неудовлетворенность среди всех коалиций. Такой дележ называют *сердцевиной* (*nucleolus*).

Рассмотрим кооперативную игру (N, v) и дележ x. *Дефицит* коалиции $S \subset N$ определяется как разность

$$d(x, S) \stackrel{\text{def}}{=} v(S) - \sum_{i\in S} x_i$$

между тем, что коалиция может получить действуя самостоятельно, и тем, что получат члены коалиции, если реализуется дележ x. Если дележ x принадлежит ядру, то дефициты всех коалиций неположительны (являются излишками).

Согласно принципу, когда тот, кто кричит громче, обслуживается первым, мы сначала должны рассмотреть коалицию $S \subset N$ с наибольшим

[2] D. Schmeidler. The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM J. Appl. Math.* **17** (1969) 1163–1170.

дефицитом $d(x, S)$ и предложить новый дележ x' с меньшим дефицитом $d(x', S)$ для коалиции S. Затем рассматривается коалиция S' с максимальным дефицитом $d(x', S')$ И так прдолжается до тех пор, пока не будет получен такой дележ $\bar{x}$, для которого мы больше не можем уменьшить максимальный дефицит. Следующий пример поможет нам прояснить данную процедуру.

Пример 5.8 (Банкротство) *Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы: кредитору 1 —* $c_1 = \$10\,000$*, кредитору 2 —* $c_2 = \$20\,000$*, кредитору 3 —* $c_3 = \$30\,000$*. Но фирма имеет только* $C = \$36\,000$ *для покрытия своих долгов. Как справедливо разделить эту сумму между кредиторами?*

Решение. Сначала построим характеристическую функцию игры по правилу

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{0, C - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\}, \quad S \subseteq N = \{1, 2, 3\}.$$

Сами по себе кредиторы 1 и 2 не могут получить никакой суммы, поскольку два остальных кредитора могут забрать всю сумму в \$36 000. По этой причите кредитор 3 может гарантированно расчитывать на сумму в \$6 000 (остаток после того, как кредиторы 1 и 2 вернут свои деньги в полном объеме). Рассуждая подобным образом, мы можем вычислить все значения характеристической функции:

$$\begin{aligned} v(\emptyset) &= 0, \\ v(1) &= v(2) = 0, \\ v(3) &= v(1, 2) = 6, \\ v(1, 3) &= 16, \\ v(2, 3) &= 26, \\ v(1, 2, 3) &= 36. \end{aligned}$$

Вычисления сердцевины представлены в табл. 5.1. Мы начинаем с дележа $(6, 12, 18)$, построенного по пропорциональному принципу: доля каждого кредитора пропорциональна его заему. Данным дележом наиболее неудовлетворена коалиция $\{2, 3\}$ с максимальным дефицитом -4. Мы можем уменьшить эту неудовлетворенность увеличивая $x_2 + x_3$ и уменьшая x_1 (чтобы сохранить равенство $x_1 + x_2 + x_3 = 36$) на некоторую величину δ_1. Уменьшение x_1 значает рост дефицитов коалиций $\{1\}$, $\{1, 2\}$ и $\{1, 3\}$. При $\delta_1 = 1$ дефициты коалиций $\{2, 3\}$ и $\{1\}$ сравняются. Поэтому в нашем следующем дележе $x_1 = 5$. Осталось определить x_2 и x_3. Мы это сделаем таким образом, чтобы для нового дележа второй по величине дефицит был минимальным при выполнении условия $x_2 + x_3 = 36 - 5 = 31$. Этот второй по величине дефицит $d(x, \{1, 5\}) = 16 - x_1 - x_3$ будет равен 8, если уменьшить x_3 на 1 и не менять значение x_2. Отсюда получаем дележ $(5, 12, 19)$.

Таблица 5.1: Вычисление сердцевины для игры из примера 5.8

S	$v(S)$	Дележи			
		$d(x,S)$	(6,12,18)	(5,12,19)	(5,10.5,20.5)
$\{1\}$	0	$-x_1$	-6	-5	-5
$\{2\}$	0	$-x_2$	-12	-12	-10.5
$\{3\}$	6	$6-x_3$	-12	-13	-14.5
$\{1,2\}$	6	$6-x_1-x_2$	-12	-11	-9.5
$\{1,3\}$	16	$16-x_1-x_3$	-8	-8	-9.5
$\{2,3\}$	26	$26-x_2-x_3$	-4	-5	-5

Из вышеприведенных рассуждений должно быть ясно, что мы уже не сможем уменьшить неудовлетворенность коалиций $\{1\}$ и $\{2,3\}$. Попытаемся уменьшить неудовлетворенность коалиции $\{1,3\}$ со следующим по величине дефицитом (=8). Мы можем уменьшить этот дефицит увеличивая x_3 и уменьшая x_2 на некоторую величину δ_2. При $\delta_2 = 1.5$ дефициты коалиций $\{1,3\}$ и $\{1,2\}$ сравняются. Следовательно наш следующий дележ есть $(5, 10.5, 20.5)$. Из предыдущих рассуждений должно быть ясно, что дальнейшее уменьшение какого-либо дефицица приведет к увеличению дефицита не меньшего за тот, который мы будем стараться уменьшить. Следовательно, дележ $(5, 10.5, 20.5)$ есть сердцевина рассматриваемой игры. Мы видим, что по этому дележу увеличиваются выплаты кредитору с максимальными потерями.

Для сравнения вычислим также значение Шепли для данной игры.

Перестановка	Вклады игроков		
	1	2	3
(1,2,3)	0	6	30
(1,3,2)	0	20	16
(2,1,3)	6	0	30
(2,3,1)	10	0	26
(3,1,2)	10	20	6
(3,2,1)	10	20	6
Средний вклад	6	11	19

Итак, значение Шепли есть дележ $(6, 11, 19)$. □

Настало время дать строгое определения понятия «сердцевина». Для дележа x обозначим черех $D(x)$ вектор вефицитов, упорядоченных в порядке неубывания. В примере 5.8, для $x = (6, 12, 18)$ мы имеем $D(x) = (-4, -6, -8, -12, -12, -12)$. Мы будем сравнивать векторы $D(x)$ лексикографически. Говорят, что вектор $y \in \mathbb{R}^n$ лексикографически не больше вектора $z \in \mathbb{R}^n$, записываем $y \preceq_{\text{lex}} z$, если $x = y$ или для некоторого k $(1 \le k < n)$ справедливы условия: $y_i = z_i$ для $i = 1, \ldots, k-1$ и $y_k < z_k$.

Дележ x называют сердцевиной игры (N, v), если для всех других дележей $x' \neq x$ справедливы неравенства $D(x) \preceq_{\text{lex}} D(x')$.

Теорема 5.1 *Сердцевина игры существует и единственна. Если ядро не пустое, то сердцевина принадлежит ядру.*

Мы оставляем эту теорему без доказательства, а всех, кого оно интересует, отсылаем к книге Оуэна.

Сердцевину игры можно вычислить следующим образом.

Сначала решаем следующую задачу ЛП:

$$\begin{gathered}
\alpha \to \min \\
\sum_{i \in S} x_i + \alpha \geq v(S), \quad S \subset N, \\
\sum_{i \in N} x_i = v(N), \\
x_i \geq 0, \quad i \in N.
\end{gathered}$$

Пусть (α^1, x^1) оптимальное решение этой задачи и пусть

$$F^1 = \left\{ S \subset N : \sum_{i \in S} x_i^1 = v(S) - \alpha^1 \right\}.$$

Затем, чтобы минимизировать второй максимальеый дефицит, нужно решить следующую залачу ЛП:

$$\begin{gathered}
\alpha \to \min \\
\sum_{i \in S} x_i = v(S) - \alpha^1, \quad S \in F_1, \\
\sum_{i \in S} x_i + \alpha \geq v(S) - \alpha_1, \quad S \subset N,\ S \notin F_1\,, \\
\sum_{i \in N} x_i = v(N), \\
x_i \geq 0, \quad i \in N.
\end{gathered}$$

Пусть (α^2, x^2) оптимальное решение данной задачи и пусть

$$F^2 = \left\{ S \subset N :\ S \notin F_1 \text{ и } \sum_{i \in S} x_i^2 + \alpha^2 = v(S) - \alpha^1 - \alpha^2 \right\}.$$

В общем случае на шаге k решаем следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned}
&\alpha \to \min \\
&\sum_{i\in S} x_i = v(S) - \sum_{j=1}^{s} \alpha^j, \quad S \in F_s,\ s = 1, \dots, k-1, \\
&\sum_{i\in S} x_i + \alpha \geq v(S) - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j, \quad S \subset N,\ S \notin \cup_{j=1}^{k-1} F_j\,, \\
&\sum_{i\in N} x_i = v(N), \\
&x_i \geq 0, \quad i \in N.
\end{aligned}$$

Пусть (α^k, x^k) оптимальное решение данной задачи и пусть

$$F^k = \left\{ S \subset N:\ S \notin \cup_{j=1}^{k-1} F_j \text{ и } \sum_{i\in S} x_i^k = v(S) - \sum_{j=1}^{k} \alpha^j \right\}.$$

Алгоритм останавливается на шаге q, когда $\alpha^q = 0$. Тогда x^q есть сердцевина игры.

5.4 Предварительные переговоры

В ситуациях, моделируемых кооперативными играми, должен быть предусмотрен период переговоров, в течении которого игроки пытаются сформировать коалиции и затем согласовать размеры взаимных выплат. Будем считать, что все игроки являются *рациональными*, т. е. такими, которые в каждой конкретной ситуации принимают те решения, которое приносят им наибольший выигрыш. В ходе дискуссий игроки могут угрожать друг другу, с целью склонить оппонентов к принятию их предложений. Чтобы быть правдоподобными, угрозы должны приносить их инициаторам меньший вред, чем их оппонентам. Поясним это на примере.

Пример 5.9 *Рассмотрим кооперативнай вариант следующей биматричной игры*

$$\begin{bmatrix} 5^*, 3^* & 0, -3 \\ 0, 0 & 4^*, 6^* \end{bmatrix}.$$

Характеристическая функция данной кооперативной игры задается следующим образом:

$$v(\emptyset) = 0,\ v(1) = v(A) = \frac{20}{9},\ v(2) = v(B^T) = \frac{3}{2},\ v(1,2) = 10.$$

Заметим, что значение $v(1,2) = 10$ достигается для ситуации равновесия $(2,2)$. Предположим, что игроки пришли к соглашению и образовали

коалицию $\{1,2\}$. *Игрок 1, знакомый с теорией кооперативных игр, предлагает использовать значение Шепли* $x^1 = (5.5, 4.5)$ *в качестве справедливого дележа, а игрок 2, не знакомый с теорией кооперативных игр, соглашается из своего выигрыша в 6 единиц заплатить игроку 1 только одну единицу, вместо запрошенных* 1.5 *единиц. Как игрок 1 может убедить игрока 2 в обоснованности своего предложения?*

Решение. Давайте сначала проверим, что дележ x^1 есть действительно значение Шепли для данной игры.

Перестановка	Вклады игроков	
	1	2
(1,2)	4	6
(2,1)	7	3
Средний вклад	5.5	4.5

Поскольку игрок 2 упорствует и не соглашается с предложением игрока 1, то игрок 1 может угрожать переходом к своей первой стратегии. Причем, эта угроза правдоподобна, поскольку при любых ответных действиях игрока 2 его потери будут большими. Будучи рациональным игроком, на стратегию 1 игрока 1 игрок 2 должен ответить своей стратегией 1. После этого сложится ситуация $(1,1)$ с выигрышем 5 у игрока 1 и выигрышем 3 у игрока 2. Против ситуации $(1,1)$ у игрока 2 нет контругрозы, поскольку его переход к стратегии 2 навредит ему больше, чем сопернику.

В силу вышеприведенного анализа угроз и контругроз игрок 2, будучи рациональным игроком, должен согласиться принять дележ x^1, чтобы получить выигрыш в 4.5 единиц вместо 3 единиц. □

Игроки используют угрозы и контругрозы для того, чтобы повлиять на выбор дележа. Но как игроки должны выбирать свои угрозы и как эти угрозы влияют на формирование окончательного дележа? Для кооперативных игр двух лиц мы можем ответить на эти вопросы вполне убедительно.

5.4.1 Кооперация двух игроков

Рассмотрим кооперативный вариант биматричной игры с $m \times n$-матрицами выигрышей игроков A и B. Характеристическая функция данной игры определяется по правилу:

$$v(\emptyset) = 0, \tag{5.8}$$

$$v(1) = v(A) = \max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A \mathrm{e}_j, \tag{5.9}$$

$$v(2) = v(B^T) = \max_{q \in \Sigma_n} \min_{1 \le i \le m} \mathrm{e}_i^T A q, \tag{5.10}$$

$$v(1,2) = \max_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} (a_{ij} + b_{ij}). \tag{5.11}$$

Заметим, что $v(1)$ и $v(2)$ есть уровни безопасности игроков.

Если игроки пришли к соглашению, то значит они согласились использовать пару стратегий (i_0, j_0), такую, что $a_{i_0 j_0} + b_{i_0 j_0} = v(1,2) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma$. Кроме того, они должны были согласовать дележ (x_1^*, x_2^*) выигрыша $\sigma = x_1^* + x_2^*$. Если $x_1^* < a_{i_0 j_0}$, то первый игрок должен выплатить второму сумму $a_{i_0 j_0} - x_1^*$, а если $x_2^* < b_{i_0 j_0}$, то тогда второй игрок должен выплатить первому сумму $b_{i_0 j_0} - x_2^*$.

Теперь предположим, что соглашение еще не достигнуто. Допустим, что в качестве своей угрозы игрок 1 выбрал стратегию p, а игрок 2 стратегию q (в общем случае p и q есть смешанные стратегии). В ситуации (p, q) первый игрок получит $D_1 = p^T A q$, а второй — $D_2 = p^T B q$. Угроза игрока 1 будет наиболее сильной, когда величина $D_1 - D_2$ максимальна. Соответственно, угроза игрока 2 наиболее сильна, когда разность $D_2 - D_1$ максимальна, что равносильно тому, что разность $D_1 - D_2$ минимальна. Поскольку

$$D_1 - D_2 = p^T (A - B) q,$$

то в действительности мы иеем матричную игру с матрицей $A - B$. Обозначим цену этой игры через δ, а оптимальные смешанные стратегии игроков — через p^* и q^*.

Вектор платежей $D^* = (D_1^* = {p^*}^T A q^*, D_2^* = {p^*}^T B q^*)$ называют *точкой разногласия*. Первый игрок не согласится получить меньше D_1^*, а второй — меньше D_2^*, поскольку эти суммы они могут получить, если соглашение не будет достигнуто. Значит, дележ $D^1 = (D_1^*, \sigma - D_1^*)$ есть предельно допустивый дележ для игрока 1, а дележ $D^2 = (\sigma - D_2^*, D_2^*)$ — предельно допустивый дележ для игрока 2. Разумным компромисом представляется выбор в качестве *справедливого дележа* вектора x^*, лежащего на середине отрезка, соединяющего точки D^1 и D^2:

$$x^* = \frac{1}{2}(D^1 + D^2) = \frac{1}{2}(D_1^* + \sigma - D_2^*, \sigma - D_1^* + D_2^*) = \left(\frac{\sigma + \delta}{2}, \frac{\sigma - \delta}{2}\right).$$

Заметим, что, отказавшись принять дележ x^* и действуя самостоятельно, игроки пострадают в равной мере.

Пример 5.10 *Определить угрозы игроков и справедливый дележ в игре со следующими выигрышами игроков:*

$$\begin{bmatrix} 0,0 & 6,2 & -1,2 \\ 4,-1 & 3,6 & 5,5 \end{bmatrix}.$$

Решение. Максимальный выигрыш игроков в этой игре $\sigma = 10$ достигается при использовании игроками стратегий $i_0 = 2$ и $j_0 = 3$.

Чтобы определить наиболее сильные угрозы игроков, решим матричную игру с матрицей

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Цена данной матричной игры равна $\delta = -9/10$, а оптимальные стратегии (угрозы) игроков $p^* = (3/10, 7/10)$, $q^* = (0, 3/10, 7/10)$.

Справедливый дележ

$$x^* = \left(\frac{10 - 9/10}{2}, \frac{10 + 9/10}{2}\right) = (4.45, 5.45)$$

предполагает выплату первым игроком второму игроку суммы в 0.45 единиц. □

5.4.2 Множества сделок

Предположим, что коалиции сформированы. Нас будут интересовать такие платежи, когда ни одному игроку нельзя пригрозить так, чтобы в результате уменьшить его долю выигрыша.

Коалиционной структурой в кооперативной игре (N, v) называется разбиение

$$\mathcal{T} = (T_1, \ldots, T_m)$$

множества игроков N.

Индивидуально-рациональной конфигурацией называется пара $(\mathcal{T}, x)$, где $\mathcal{T}$ — коалиционная структура, а $x = (x_1, \ldots, x_n)$ есть вектор, удовлетворяющий условиям

$$\sum_{i \in T_j} x_i = v(T_j), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{5.12}$$

$$x_i \geq v(i), \quad i \in N. \tag{5.13}$$

Здесь (5.12) есть вариант условия коллективной рациональности, когда участники каждой из коалиций делят весь свой выигрыш. Для $i \in N$ множество

$$P(i, \mathcal{T}) = \{k \in T_j : i \in T_j\}$$

есть множество партнеров игрока $i \in N$ в коалиционной структуре $\mathcal{T}$.

Угрозой игрока k против своего партнера $l \in P(k, \mathcal{T})$ называется другая индивидуально-рациональная конфигурация $(\mathcal{U}, y)$, такая, что

a) если $i \in P(k, \mathcal{U})$, то $y_i > x_i$;

b) $l \notin P(k, \mathcal{U})$.

Контругрозой l против k называется некоторая третья индивидуально-рациональная конфигурация $(\mathcal{V}, z)$, такая, что

a) если $i \in P(l, \mathcal{U})$, то $z_i \geq x_i$;

b) если $i \in P(l, \mathcal{V}) \cap P(k, \mathcal{U})$, то $z_i > y_i$;

c) $k \notin P(l, \mathcal{V})$.

Индивидуально-рациональная конфигурация, при которой для любой угрозы k против l у игрока l имеется контругроза против k, называется *устойчивой*.

Предположим, что в игре «покупка лошади» сформирована коалиционная структура $\mathcal{T} = (\{1,2\},\{3\})$. Тогда $(\mathcal{T}, x)$ есть устойчивая индивидуально-рациональная конфигурация тогда и только тогда, когда $x_3 = 0$ и выполняются неравенства $x_1 \geq 900$, $x_1 + x_2 = 1000$.

Множеством сделок $\mathcal{M}_1^{(i)}$ называется множество всех устойчивых индивидуально-рациональных конфигураций. Это множество не пусто в строгом смысле, т.е. для любой конфигурации $\mathcal{T}$ существует по крайней мере один вектор x, такой, что $(\mathcal{T}, x) \in \mathcal{M}_1^{(i)}$.

5.5 Коррелированное равновесие

Коррелированное равновесие — это обобщение равновесия по Нэшу. Это понятие введено Робертом Оманом[3] (Нобелевским лауреатомов в области экономики 2006 года). Предполагается, что игроки могут действовать согласованно, но не настолько как в кооперативных играх, когда выигрыши игроков могут перераспределяться (некоторые игроки могут передовать часть своего выигрыша других игрокам). Для заданной бескоалиционной игры *коррелированное равновесие* определяется как такое распределение вероятностей на множестве ситуаций, когда ни одному игроку в отдельности не выгодно отклоняться от генерируемой (в соответствии с этим распределением) стратегии.

Начнем с примера. Рассмотрим биматричную *игру цыплят* со следующими выигрышами игроков

	B	C
B	0,0	7,2
C	2,7	6,6

В этой игре, каждый из участников может принять вызов (B) или «струсить» (C). Если один из участников принимает вызов, то другому лучше струсить. Но если один из участников решил струсить, то другому лучше принять вызов. Следовательно, каждый из участников хотел бы принять вызов, но только при условии, что оппонент может струсить.

В этой игре имеется две ситуации равновесия в чистых стратегиях (B, C) и (C, B). Кроме этого, также имеется одна ситуация равновесия в смешанных стратегиях, когда каждый из участников принимает вызов с вероятностью 1/3: $(p_B, p_C) = (1/3, 2/3)$ и $(q_B, q_C) = (1/3, 2/3)$. Выигрыши обоих игроков в данной смешанной ситуации равновесия равны $4\frac{2}{3}$.

Рассмотрим следующее распределение вероятностей на множестве ситуаций: $p(B,B) = 0$ и $p(C,C) = p(B,C) = p(C,B) = 1/3$ ($P(X,Y)$ обозначет

[3] R. Aumann. Subjectivity and correlation in randomized strategies. *Journal of Mathematical Economics* **1** (1974) 67–96.

вероятность выбора ситуации (X, Y)). Мы можем представить, что имеются три карты соответственно с метками (CC), (B, C) и (C, B). Перед началом очередной партии игры доверенное лицо обоих игроков (например, компьютер) случайно с равной вероятностью выбирает одну из карт. Пусть (X, Y) обозначает метку на выбранной карте. Доверенное лицо рекомендует игроку 1 использовать стратегию X, а игроку 2 — стратегию Y. Заметим, что игрок 1 не знает Y, а игрок 2 не знает X.

Убедимся, что указанное распределение вероятностей на множестве ситуаций является коррелированным равновесием. Если $X = B$, то игрок 1 знает, что второй игрок применит стратегию $Y = C$. В таком случае, выигрыш игрока 1 равен 7 и ему не выгодно переходить к стратегии C, поскольку тогда сложится ситуация (C, C), в которой выигрыш игрока 1 равен 6. Если $X = C$, то с вероятностью $1/2$ значение Y равно B или C. Поэтому средний выигрыш игрока 1 равен $1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot 6 = 4$. А если игрок 1 перейдет к стратегии B, то его средний выигрыш будет равен $1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 7 = 7/2 < 4$. Поскольку данная игра симметрична, то и игроку 2 также не выгодно отклоняться от рекомендуемой стратегии. Значит данное распределение вероятностей является коррелированным равновесием. Заметим также, что в этой ситуации коррелированного равновесия ожидаемый выигрыш каждого из игроков равен $1/3 \cdot 7 + 1/3 \cdot 2 + 1/3 \cdot 6 = 5$, что больше ожидаемого выигрыша игроков, равного $4\frac{2}{3}$, в ситуации равновесия в смешанных стратегиях.

Теперь перейдем к общему случаю и рассмотрим конечную бескоалиционную игру $\gamma = (\{1, \ldots, n\}, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\phi_i\}_{i=1}^n)$. Распределение вероятностей $p : S \to \mathbb{R}_+$ на множесве ситуаций $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ называется *коррелированным равновесием*, если выполняются следующие условия:

$$\sum_{\substack{s \in S: \\ s_i = \bar{s}_i}} p(s)\phi_i(s) \geq \sum_{\substack{s \in S: \\ s_i = \bar{s}_i}} p(s)\phi_i(s\|\hat{s}_i), \quad \forall \hat{s}_i \in S_i \setminus \bar{s}_i,\ \bar{s}_i \in S_i,\ i = 1, \ldots, n, \tag{5.14}$$

$$\sum_{s \in S} p(s) = 1, \tag{5.15}$$

$$p(s) \geq 0, \quad s \in S. \tag{5.16}$$

Здесь неравенства (5.14) выражают тот факт, что ни одному из игроков не выгодно отходить от рекомендуемой стратегии. Равенство (5.15) нужно для того, чтобы отображение $p : S \to \mathbb{R}_+$ задавало распределение вероятностей на S. Заметим также, что количестве неизвестных в системе (5.14)–(5.16) равно $|S_1| \times \cdots \times |S_n|$.

Как правило, системы линейных неравенств решаются методами линейного программирования. Для этого к системе неравенств нужно добавить любую целевую функцию. Например, если мы хотим максимизировать суммарный ожидаемый доход всех игроков, то нужно добавить к системе

(5.14)–(5.16) следующую целевую функцию:

$$\sum_{s\in S}\left(\sum_{i=1}^{n}\phi_i(s)\right)p(s)\to\max\,. \tag{5.17}$$

А в случае, если мы хотим максимизировать минимальный из доходов игроков, к системе (5.14)–(5.16) нужно добавить следующую целевую функцию и n неравенств:

$$\gamma\to\max \tag{5.18}$$

$$\sum_{s\in S}\phi_i(s)p(s)\geq\gamma,\quad i=1,\ldots,n. \tag{5.19}$$

5.5.1 Примеры

Пример 5.11 *Найдем коррелируемое равновесие для игры цыплят, при котором суммарный выигрыш двух игроков максимален.*

Решение. Запишем задачу ЛП (5.14)–(5.16) и (5.17):

$$\begin{aligned}
0p(B,B)+9p(B,C)+9p(C,B)+12p(C,C)&\to\max\\
0p(B,B)+7p(B,C)&\geq 2p(B,B)+6p(B,C),\\
2p(C,B)+6p(C,C)&\geq 0p(C,B)+7p(C,C),\\
0p(B,B)+7p(C,B)&\geq 2p(B,B)+6p(C,B),\\
2p(B,C)+6p(C,C)&\geq 0p(B,C)+7p(C,C),\\
p(B,B)+p(B,C)+p(C,B)+p(C,C)&=1,\\
p(B,B),p(B,C),p(C,B),p(C,C)&\geq 0
\end{aligned}$$

или после преобразований

$$\begin{array}{rrrrl}
 & 9p(B,C) & +\,9p(C,B) & +\,12p(C,C) & \to\max\\
2p(B,B) & -\;p(B,C) & & & \leq 0,\\
 & & -\,2p(C,B) & +\;p(C,C) & \leq 0,\\
2p(B,B) & & -\;p(C,B) & & \leq 0,\\
 & -\,2p(B,C) & & +\;p(C,C) & \leq 0,\\
p(B,B) & +\;p(B,C) & +\;p(C,B) & +\;p(C,C) & =1,\\
 & p(B,B),p(B,C) & ,p(C,B) & ,p(C,C) & \geq 0.
\end{array}$$

Оптимальное решение этой задачи ЛП следующее:

$$p(B,B)=0,\ p(B,C)=p(C,B)=\frac{1}{4},\ p(C,C)=\frac{1}{2}.$$

Для данного корреллированного равновесия ожидаемый выигрыш каждого из игроков равен

$$\frac{1}{4}(2+7)+\frac{1}{2}6=5\frac{1}{4},$$

что больше ожидаемого выигрыша игроков для корреллированного равновесия, рассмотренного ранее. □

Пример 5.12 *Две радиостанции АЛЬФА-радио и БЕТА-радио должны выбрать формат вещания из трех возможных: музыка, спорт, или новости. Аудитория этих форматов — соответственно 50%, 30% и 20%. Если они выберут одинаковый формат, то соответствующая аудитория разделится между станциями. Если будут выбраны разные форматы, каждая из станций получит всю аудиторию, выбранного ею формата. Доходы станций пропорциональны их аудитории. Определить оптимальные стратегии радиостанций.*

Решение. Составим матрицу выигрышей игроков (АЛЬФА-радио — игрок 1, БЕТА-радио — игрок 2):

	М	С	Н
М	25,25	50,30	50,20
С	30,50	15,15	30,20
Н	20,50	20,30	10,10

Для обоих игроков стратегия М (музыка) доминирует стратегию С (спорт). Удалив стратегию С, мы получим усеченную игру со следуюшей матрицей выигрышей игроков:

	М	С
М	$25, 25$	$50^*, 30^*$
С	$30^*, 50^*$	$15, 15$

Усеченная игра имеет две неравноценные для игроков ситуации равновесия в чистых стратегиях: (М,С) и (С,М).

Найдем коррелированное равновесие, для которого минимальный ожидаемый выигрыш игрока максимален. Запишем задачу ЛП с ограничениями (5.14)–(5.16), двумя дополнительными неравенствами (5.20) и (5.21), которые требуют, чтобы ожидаемые выигрыши соответственно первого и второго игроков были не мельше v. Максимизируя v, мы максимизируем минимальный из выигрышей игроков:

$$
\begin{aligned}
v &\to \max \\
25p(M,M) + 50p(M,C) &\geq 30p(M,M) + 15p(M,C), \\
30p(C,M) + 15p(C,C) &\geq 25p(C,M) + 50p(C,C), \\
25p(M,M) + 50p(C,M) &\geq 30p(M,M) + 15p(C,M), \\
30p(M,C) + 15p(C,C) &\geq 25p(M,C) + 50p(C,C), \\
p(M,M) + p(M,C) + p(C,M) + p(C,C) &= 1, \\
25p(M,M) + 50p(M,C) + 30p(C,M) + 15p(C,C) &\geq v, \qquad (5.20) \\
25p(M,M) + 30p(M,C) + 50p(C,M) + 15p(C,C) &\geq v, \qquad (5.21) \\
p(M,M), p(M,C), p(C,M), p(C,C) &\geq 0,
\end{aligned}
$$

или после преобразований

$$
\begin{aligned}
v &\to \max \\
5p(M,M) - 35p(M,C) & \le 0, \\
-\ 5p(C,M) + 35p(C,C) & \le 0, \\
5p(M,M) - 35p(C,M) & \le 0, \\
-\ 5p(M,C) + 35p(C,C) & \le 0, \\
p(M,M) + p(M,C) + p(C,M) + p(C,C) &= 1, \\
25p(M,M) + 50p(M,C) + 30p(C,M) + 15p(C,C) &\ge v, \\
25p(M,M) + 30p(M,C) + 50p(C,M) + 15p(C,C) &\ge v, \\
p(M,M), p(M,C), p(C,M), p(C,C) &\ge 0.
\end{aligned}
$$

Оптимальное решение данной задачи ЛП следующее:

$$
p(M.M) = p(C,C) = 0,\ p(M,C) = p(C,M) = \frac{1}{2},\ v = 40. \tag{5.22}
$$

Мы можем легко убедиться в этом: в силу того, что минимальный из выигрышей игроков не может быть больше половины максимального суммарного их выигрыша, $v \le (50+30)/2 = 40$, нам достаточно проверить, что ни одно из ограничений задачи ЛП не нарушается на данном решении.

Коррелируемое равновесие (5.22) рекомендует радиостанциям чередовать вещание: один период музыку передает АЛЬФА-радио, а спорт — БЕТА-радио; в следущий период музыку передает БЕТА-радио, а спорт — АЛЬФА-радио. При этом, обе станции в среднем будут слушать 40% радиослушателей.

В заключение, будет полезным сравнить коррелируемое равновесие (5.22) со смешанной ситуацией $p = (1/2, 1/2)$ и $q = (1/2, 1/2)$, которая рекуомендует обоим станциям половину времени вещания передавать музыку, а другую половину — спорт.

При этом *в худшем случае* каждую из станций в среднем будет слушать $\frac{1}{4}(50+30+25+15) = 30$ процентов радиослушателей. Где же потерялись 20% радиослушателей (суммарно спорт и музыку слушают 80% радиослушателей, а суммарная аудитория обоих станций 60%)? Дело в том, что каждая из станций принимает решения не советуясь с конкурентом. Скажем, каждый день сотрудники станции подбрасывают монету, чтобы определить по какому формату они будут работать. Если выпал орел, то в первую половину суток они передают музыку, а во вторую — новости; если выпала решка, то они сначала передают спорт, а затем — музыку. Поскольку станции принимают решения независимо друг от друга, то с вероятностью 1/2 они целый день будут вещать по одному формату. □

5.6 Упражнения

1. Три фермы соединены между собой и с шоссе сетью грунтовых дорог так, как показано на рис. 5.2. Фермеры решили вместе заасфальтировать

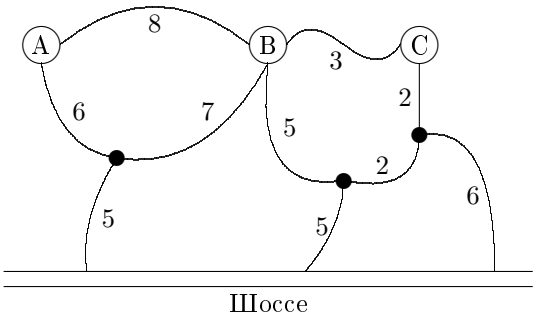


Рис. 5.2: Сеть дорог для примера 1

часть грунтовых дорог так, чтобы от каждой фермы можно было доехать до шоссе по асфальтированной дороге. Стомости асфальтирования каждого из грунтовых участков приведены на вышеприведенном рисунке. Какие участки нужно заасфальтировать? Как справедливо разделить расходы на строительство между фермерами?

2. Три врача решили объединиться для совместной практики. Постоянные расходы (на аренду помещений, зарплату помощника, и т. д.) в год составляют \$75 000. Заметим, что эти расходы каждый из врачей будут нести и в случае, когда он будет практиковать самостоятельно. Врачи имеют следующие годовые доходы и переменные расходы:

доктор	доход	расходы
1	\$155 000	\$40 000
2	\$160 000	\$35 000
3	\$140 000	\$38 000

Врачи решили использовать теорию игр, чтобы определить, сколько каждый из них должен зарабатывать. Определите характеристическую функцию игры и ее значение Шепли. Является ли значение Шепли справедливым дележом?

3. Акции некоторой корпорации разделены между тремя лицами в следующей пропорции: лицо 1 имееь 1% акций; лицо 2 — 49%; лицо 3 — 50%. Чтобы принять решение на годовом собрании акционеров необходимо, чтобы за это решение проголосолали не менее 51% акций. Коалиция акционеров в случае принятия решения получает выигрыш 1, и 0, если решение не принимается.

a) Построить характеристическую функцию игры.

b) Найти ядро игры.

c) Найти значение Шепли.

d) Проверьте, что дележ $(1/3, 1/3, 1/3)$ не принадлежит ядру. Найдите дележ, который доминирует данный дележ.

4. Продавец (игрок 1) владеет предметом, не представляющим никакой ценности для него. Первый покупатель (игрок 2) оценивает предмет в \$30, а второй покупатель (игрок 3) — в \$40. Составить характеристическую функцию игры, определить ядро и вычислить значение Шепли.

5. Совет Безопасности ООН состоит из 5 постоянных членов (которые могут наложить вето на любую резолюцию) и 10 непостоянных. Чтобы провести любое решение, нужно, чтобы за него проголосовало не менее 9 членов, включая всех постоянных членов. Определим цену любой коалиции, которая может принять решение, равной 1, а цену любой другой коалиции — равной 0. Определите силу постоянных и непостоянных членов Совета Безопасности, вычислив дележ Шепли.

6. (**Сбалансированный однопродуктовый рынок**) Рассмотрим рынок, на котором продается и покупается только один абсолютно делимый продукт. Множество покупателей обозначим через B, а продавцов — через C; $N = B \cup C$ есть множество игроков. Продавец $k \in C$ имеет y_k единиц продукта, а покупатель $j \in B$ собирается купить x_j единиц продукта. Предположим, что спрос и предложение уравновешены: $\sum_{k\in C} y_k = \sum_{j\in B} x_j$. Мы моделируем поведение участников такого рынка в виде кооперативной игры с характеристической функцией

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left\{\sum_{j\in S\cap B} x_j\,,\ \sum_{k\in S\cap C} y_k\right\}.$$

Здесь цена коалиции $S \subseteq N$ равна объему торговли между членами коалиции. Найдите значение Шепли для данной игры.

7. Владелец (игрок 0) имеет некоторый объект, который является произведением искуства, Покупатель i (игрок i) оценивает данный объект в a_i долларов ($i = 1, \ldots, n$). Известно, что $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$. Кто из игроков купит объект и за какую сумму? Какова роль игроков? Покажите, компоненты значения Шепли вычисляются по правилу:

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k\,(k+1)}, \\
\phi_i &= \frac{a_i}{i(i+1)} - 2\sum_{k=i+1}^{n} \frac{a_k}{(k-1)\,k\,(k+1)}, \quad i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

8. Трем фирмам нужны склады для хранения некоторого продукта. Фирмы могут строить склады самостоятельно, а также могут кооперироваться и строить совместно используемые склады. Первой фирме нужен склад площадью 100 м^2, второй — 200 м^2, третьей — 300 м^2. Стоимость строительства склада в зависимости от площади представлена в следующей таблице:

100 м^2	200 м^2	300т.	400 м^2	500 м^2	600 м^2
10	18	25	30	34	36

Для каждой из фирм определите ее затраты на строительство склада, вычислив: 1) значение Шепли, 2) сердцевину игры.

9. Построить характеристическую функцию кооперативной игры трех лиц, если каждый из игроков имеет по две стратегии, а платежи определяются по правилу:

Если игрок 1 выбирает стратегию 1

		Игрок 3: 1	2
Игрок 2:	1	(1,2,1)	(3,0,1)
	2	(-1,6,-3)	(3,2,1)

Если игрок 1 выбирает стратегию 2

		Игрок 3: 1	2
Игрок 2:	1	(-1,2,4)	(1,0,3)
	2	(7,5,4)	(3,2,1)

10. **Брачный контракт** (Вавилонский Талмуд 0-500AD) Мужчина имеет три жены. Их брачный контракт предусматривает, что в случае смерти мужа, первая жена получит $c_1 = 100$, вторая — $c_2 = 200$, а третья — $c_3 = 300$. После смерти мужа осталась сумма денег C.

Для $S \subseteq N = \{1, 2, 3\}$ определим

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{0, C - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\}.$$

Вычислите сердцевину кооперативной игры (N, v) и вы узнаете, как талмуд рекомендует разделить сумму C между женами, когда a) $C = 100$, b) $C = 200$, c) $C = 300$.

11. Длина посадочной полосы в аэророрту равна 1500 м. На поддержание полосы в хорошем состоянии тратится \$3150 000 в год. На эту полосу приземляются самолеты четырех типов. Число посадок в год и длина пробега при посадке для каждого типа самодетов приведены в следующей таблице.

Тип самолета	Число приземлений	Длина пробега
1	600	600 м
2	700	900 м
3	500	1200 м
4	200	1500 м

Предположим, что затраты делятся следующим образом: все самолеты, которые совместно используют долю полосы, делят расходы по эксплуатации этой доли в равной пропорции.

Какую долю затран нужно отнести на одну посадку каждого типа самолета?

12. Докажите, что равновесия Нэша в смешанных стратегиях и их выпуклые комбинации являются также и коррелированными равновесиями.

13. Найдите коррелированные равновесия с максимальным суммарным ожидаемым доходом для игры «конфликт полов» (см. упр. 2.8).

Литература

[1] Г.Н. Дюбин, В.Г. Суздаль. Введение в прикладную теорию игр. -М.: Наука, 1981.

[2] М. Интрилигатор. Математические методы оптимизации и экономическая теория. -М.: Айрис Пресс, 2002.

[3] Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведение. -М.: Наука, 1970.

[4] Х. Никайдо. Выпуклые структуры и математическая экономика. -М.: Мир, 1972.

[5] Г. Оуэн. Теория игр. -М.: Мир, 1971.

[6] R.A. Aumann. Lectures on Game Theory. Westview Press, Inc., Boulder, Colorado, 1989.

[7] D. Fudenberg, J. Tirole. Game Theory, MIT Press, 1991.

[8] R. Gibbons. Game theory for applied economists. Princeton University Press, 1992.

Предметный указатель